# Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King

Inauguraldissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

vorgelegt von

**Johanna Simonett**

von Andeer, Graubünden

Bern

Gedruckt bei Stämpfli & Cie.

1933

# Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King

Inauguraldissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

vorgelegt von

**Johanna Simonett**

von Andeer, Graubünden

Bern

Gedruckt bei Stämpfli & Cie.

1933

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. Chr. Moser angenommen.

Bern, den 19. Februar 1931.

*Der Dekan:*
Prof. **Ed. Fischer.**

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Ich möchte an dieser Stelle den Herren Prof. Moser, Prof. Friedli, Prof. Crelier, Prof. Gonseth, Prof. Mauderli und Prof. Scherrer für die mir während des Studiums erwiesene Unterstützung und Anregung meinen besten Dank aussprechen.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Herrn Prof. Moser und Herrn Prof. Friedli verpflichtet. Durch ihre stete Unterstützung und reiche Anregung konnte die vorliegende Arbeit entstehen und durchgeführt werden.

# Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King.

Von **Johanna Simonett.**

## Einleitung.

Die unmittelbaren Ergebnisse einer statistischen Messung bieten in ihrer Zusammenstellung meistens nicht ein befriedigendes Bild, denn die graphisch aufgetragenen Daten führen in der Regel zu einer mehrfach gebrochenen Linie, während man erwartete, dass sich durch die Endpunkte derselben eine glatte Kurve legen lasse. Die Gründe dafür, dass dies nicht so ist, sind die zufälligen Fehler, die jeder empirischen Bestimmung einer Grösse anhaften, sowie Störungen des normalen Verlaufes der Erscheinung. Es wird nun angenommen, dass diese Abweichungen mit zunehmender Beobachtungszahl abnehmen und bei unendlich grosser Beobachtungszahl sogar verschwinden und sich somit ein regulärer Verlauf ergeben würde. Diese Annahme beruht auf der Überlegung: die Natur macht keine Sprünge.

Mittels der Ausgleichung wünscht man nun die unregelmässige Reihe der Beobachtungsdaten durch eine regelmässige glatte Zahlenreihe zu ersetzen, die natürlich den beobachteten Werten möglichst gut folgen soll. Auf diese Weise werden die durch die Beobachtung

gewonnenen Werte auch für praktische Zwecke besser verwendbar gemacht. Denn es wird z. B. die Richtigkeit komplizierter Rechnungen besser übersehen, wenn man die Rechnungsresultate an dem regelmässigen Verlauf der Differenzen kontrollieren kann.

Das *graphische* Ausgleichsverfahren ergibt sich leicht aus der graphischen Darstellung der Beobachtungsdaten, die erkennen lässt, inwieweit sich die einzelnen Werte dem allgemeinen Zuge anpassen oder von ihm abweichen. Hier sind besonders die Arbeiten von *Sprague* [1]) über die graphische Ausgleichung zu erwähnen.

Der Wunsch, die Endresultate so regelmässig zu gestalten, als ob sie aus einem analytischen Gesetz hervorgegangen wären, führt zur *analytischen* Ausgleichungsmethode. Die Funktion, nach der die beobachtete Erscheinung verläuft, ist im allgemeinen nicht von vornherein bekannt, und in der Regel muss eine hypothetisch angenommene analytische Funktion der Beobachtungsreihe angepasst werden. Dies geschieht z. B. bei der Überlebensordnung Erwachsener durch die Makehamsche Funktion.

Die *mechanischen* Methoden gehen von der Überlegung aus, dass die Störung eines Einzelwertes einer Beobachtungsreihe sich auch in den beiderseits benachbarten Werten bemerkbar mache. Indem man an der Bestimmung eines Einzelwertes auch die Nachbarwerte mitwirken lässt, erwartet man einen Ausgleich der zufälligen Störungen und eine grössere Regelmässigkeit der Wertereihe. Die ausgeglichenen Resultate werden dann allerdings nicht so glatt verlaufen, wie wenn sie nach einem analytischen Gesetz ausgeglichen sind.

---

[1]) Literaturnachweise siehe Seite 56.

*In der vorliegenden Arbeit wird nach einer Übersicht über die mechanischen Methoden insbesondere die Kingsche Ausgleichungsmethode behandelt* und dabei auf die Untersuchungen von *Karup* über die Interpolation durch Korrektion der letzten Differenzenreihe hingewiesen, die für die Berechnungen von Vorteil sind. *Ferner soll die Anwendbarkeit der Methode von King an einigen Ausgleichungsergebnissen erwiesen werden.*

Für eine strenge Ausgleichung sollten Gewichte eingeführt werden, die man am besten proportional der Anzahl der beobachteten Grössen bei jedem Wert der unabhängigen Variablen wählt. Ohne Gewichte ist aber die Rechnung wesentlich einfacher und sie werden deshalb meistens weggelassen, da sie ohnedies für nicht zu weit entfernte Glieder einer Beobachtungsreihe kaum verschieden sind.

Ist eine Ausgleichung durchgeführt worden, so sollte daneben die durch die *Beobachtung* erhaltene Zahlenreihe auf alle Fälle aufbewahrt werden, da sie allein den wirklichen Verlauf im Beobachtungszeitraum darstellt. Sie dient auch als Grundlage für Untersuchungen, deren Aufgabe das Auffinden von Unregelmässigkeiten ist, die in der Natur der Erscheinung liegen. Wir dürfen bei aller begründeten Ausgleichung eben nie übersehen, dass im Einzelfalle die Beobachtung selbst den wahrscheinlichsten Wert ergibt. An dieser Tatsache «kann nichts geändert werden», wie *G. Schaertlin* [2]) sehr richtig bemerkt.

# I. Die mechanischen Ausgleichungsmethoden.

## § 1. Allgemeines.

Theoretischer Fehler. Ausgleichskoeffizient.

1. Die verschiedenen mechanischen Methoden wurden hauptsächlich von den Engländern aus der Praxis heraus entwickelt. In Deutschland besteht dagegen eine reiche Literatur über die Zweckmässigkeit derselben.

Mechanisch ausgleichen heisst, die einzelnen Glieder $y_x$ einer Beobachtungsreihe durch Mittelwerte aus dem auszugleichenden Glied und den ihm benachbarten zu ersetzen, wobei nach einem festen Gesetz verfahren wird. Eine mechanische Formel kann folgendermassen dargestellt werden:

$$A(y_x) = \sum_{k=-m}^{k=n} a_k \, y_{x+k} \qquad (\alpha)$$

$A$ bedeutet dabei das Symbol der Operation. Gewöhnlich ist $m = n$ und $a_k = a_{-k}$, d. h. die Koeffizienten der links und rechts vom auszugleichenden Wert gleichweit entfernten Glieder sind gleich, und die Formel wird damit symmetrisch. Wird nun der unausgeglichene Wert $y_x$ zerlegt in $\bar{y}_x + \varepsilon_x$, wo $\bar{y}_x$ den unbekannten wahren Wert und $\varepsilon_x$ den Fehler von $y_x$ bedeutet, dann ist, unter Berücksichtigung von $(\alpha)$:

$$A(y_x) = A(\bar{y}_x + \varepsilon_x) = A(\bar{y}_x) + A(\varepsilon_x)$$

Soll $A$ eine Ausgleichsoperation darstellen, dann muss $A(\bar{y}_x) = \bar{y}_x$ sein, d. h. der wahre Wert muss ungeändert bleiben.

Nimmt man an, $y_{x+k}$ könne nach Taylor entwickelt werden, d. h.

$$\bar{y}_{x+k} = \bar{y}_x + k\bar{y}'_x + \frac{k^2}{2!} y''_x + \dots$$

dann ist

$$A(\bar{y}_x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \bar{y}_{x+k}$$

$$= \bar{y}_x \Sigma a_k + \bar{y}'_x \Sigma k a_k + \dots + \frac{\bar{y}^{(\nu)}_x}{\nu!} \Sigma k^\nu a_k + \dots$$

Soll nun $\bar{y}_x$ reproduziert werden, so fordert dies:

$$\Sigma a_k = 1 \quad \text{und} \quad \Sigma k^\nu a_k = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Die Anzahl der Koeffizienten $a_k$ ist aber beschränkt, und die Bedingungen können deshalb nur für einen begrenzten Wert von $\nu$ erfüllt sein, d. h. dass im allgemeinen nur ganze rationale Funktionen durch mechanische Operationen genau wiedergegeben werden und die andern nur insofern, als sie durch solche angenähert dargestellt werden können.

Die Koeffizienten $a_k$ sind nun so zu wählen, dass durch $A$ bestimmte Kurven, Parabeln irgend eines vorgeschriebenen Grades, reproduziert werden. Daneben sollte auch die Quadratsumme der Differenzen zwischen beobachteten und ausgeglichenen Werten ein Minimum werden. Diese zweite Bedingung wird aber von den meisten Methoden nur mit grösserer oder geringerer Näherung erfüllt.

2. Der sogenannte theoretische Fehler einer mechanischen Formel wird durch die ersten vernachlässigten Differentialquotienten mit den entsprechenden Koeffi-

zienten angegeben. Bedeutet $y$ den beobachteten, $y'$ den ausgeglichenen Wert und $y_x$ das Zentralglied, so lautet die mechanische Formel:

$$y'_x = a_0\, y_x + a_1\, \gamma_1 + a_2\, \gamma_2 + \dots \qquad (1)$$

oder auch $m\, y'_x = a\, y_x + b\, \gamma_1 + c\, \gamma_2 + \dots$

wenn allgemein $\gamma_k$ für $(y_{x+k} + y_{x-k})$ gesetzt wird.

Zur Betrachtung des theoretischen Fehlers entwickelt man am besten $\gamma_k$ nach Taylor und erhält:

$$\gamma_k = y_{x+k} + y_{x-k} = 2\, y_x + k^2\, y''_x + \frac{k^4}{12}\, y_x^{(\mathrm{IV})} + \frac{k^6}{360}\, y_x^{(\mathrm{VI})} + \dots$$

Alle ungeraden Differentialquotienten verschwinden also und durch Einsetzen in (1) ergeben sich die Koeffizienten der vernachlässigten Differentialquotienten. Es ist üblich, die Entwicklung nur bis zum 6. Differentialquotienten durchzuführen.

3. Die Untersuchung der Wirkung der Ausgleichsoperation auf die Fehler $\varepsilon_x$ zeigt, dass der Fehler $A(\varepsilon_x)$ von $A\,(y_x)$ als lineare Verbindung der Fehler der Beobachtungswerte in der Umgebung von $y_x$ erscheint:

$$A\,(\varepsilon_x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, \varepsilon_{x+k}$$

d. h. also, dass durch die mechanische Ausgleichung die Fehler auf die Nachbarbeobachtungen verteilt werden. Es muss nun von $A$ verlangt werden, dass durch die Anwendung der Operation die Fehler so weit als möglich reduziert werden und die bleibenden Fehler eine kontinuierliche Folge bilden.

Die Ergebnisse einer Ausgleichsformel werden um so regelmässiger ausfallen, je mehr Beobachtungen sie um-

fasst, jedoch ist die Zahl der Glieder nicht allein ausschlaggebend. Man kann sich auf Grund der Kenntnis der Koeffizienten ein Urteil bilden, ob eine Formel stärker oder weniger stark glättet als eine andere. Am besten wird, unter sonst gleichen Umständen, eine Formel ausgleichen, in welcher die Koeffizienten eine wenig gekrümmte, im Auf- und Absteigen fast geradlinige Kurve darstellen, die an den Punkten, wo Windungen unvermeidlich sind, möglichst flach verläuft. Da im Verlauf der Rechnung jede Beobachtung sukzessive alle Koeffizienten als Faktor erhält, wird eine Unregelmässigkeit offenbar um so weniger reproduziert, je allmählicher sie in die Rechnung eintritt und je gleichmässiger sie über eine grössere Strecke verteilt wird. Auf diesen Zusammenhang weisen neben *Karup* [4]) auch die Engländer *Hardy* [5]), *Higham* [6]), *Lidstone* [7]) und *Spencer* [8]) hin. Die Formel von *Woolhouse* [9]) liefert deshalb nicht regelmässige Resultate, weil sie «hochschultrig» ist, wodurch die Beobachtungen mit rasch wechselndem Gewicht in die Rechnung treten.

Je glatter die Koeffizienten verlaufen, desto kleiner werden auch die Unregelmässigkeiten in ihren Differenzen sein. Als Ausgleichungskoeffizient bezeichnet man nun das Verhältnis der Quadratwurzel der Summe der Quadrate der 3. Differenzen der Koeffizienten zu $\sqrt{20}$, d. h. der Quadratwurzel der Summe der Quadrate der 3. Differenzen (1, — 3, 3, — 1) der Einheit, also dem Koeffizienten des unausgeglichenen Wertes:

$$AK = \frac{\sqrt{\Sigma\,(\Delta^3 a_k)^2}}{\sqrt{20}} \qquad (2)$$

Er kann als Mass betrachtet werden, in dem Fehler in den 3. Differenzen, wenn die 4. Differenzen als ver-

schwindend klein angenommen werden, durch Anwendung der Ausgleichsformel reduziert werden. Die Ausgleichungskraft wächst demnach mit zunehmender Reduktion der Ausgleichungskoeffizienten. Ein Vergleich der verschiedenen mechanischen Formeln zeigt, dass mit der Zunahme des Ausgleichungskoeffizienten auch der theoretische Fehler zunimmt.

4. Die meisten mechanischen Ausgleichungsformeln werden mit der Differenzenrechnung abgeleitet und deshalb seien hier die wichtigsten Beziehungen zwischen den aufsteigenden Differenzen $\Delta$ erwähnt.

Es ist:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = y_{x+2} - 2 y_{x+1} + y_x$$

.....

und allgemein

$$\Delta^n y_x = y_{x+n} - \binom{n}{1} y_{x+n-1} + \binom{n}{2} y_{x+n-2} - \ldots + (-1)^n y_x \quad (3)$$

Ein beliebiger Wert $y$ kann dann mit einem Ausgangswert und den entsprechenden Differenzen dargestellt werden, z. B.

$$y_{x+n} = y_x + n \Delta y_x + \binom{n}{2} \Delta^2 y_x + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^n y_x \quad (4)$$

oder auch

$$y_{x+\frac{t}{m}} = y_x + t \frac{\Delta y_x}{m} + \frac{t(t-m)}{2} \frac{\Delta^2 y_x}{m^2} + \frac{t(t-m)(t-2m)}{2 \cdot 3} \frac{\Delta^3 y_x}{m^3} + \ldots \quad (4$$

5. Die Ausgleichung einer Reihe von Werten kann statt an diesen selbst an ihren Verhältnissen vollzogen

werden (Ausgleichung mittels Faktoren) oder auch an ihren Logarithmen, da sich dadurch regelmässigere Resultate ergeben.

### § 2. Überprüfung der Ausgleichung.

Die Güte einer Ausgleichung wird durch die Glätte der erhaltenen Wertereihe und den Anschluss an die Beobachtungsdaten beurteilt.

1. Bei Anwendung der analytischen Ausgleichung wird die Glätte ohne weiteres angenommen. Sonst aber wird verlangt, dass die 3. Differenzen der ausgeglichenen Werte klein sind oder dann einem bestimmten Gesetz folgen. Zum Vergleich von zwei verschiedenen Ausgleichungen derselben Reihe wünscht man aber doch meistens ein numerisches Mass und bestimmt deshalb die Summe der Quadrate der 3. Differenzen:

$$\Sigma\,(\Delta^3 y')^2$$

2. Um nachzuprüfen, ob die ausgeglichenen Daten den beobachteten gut folgen, berechnet man ihre Differenzen oder Abweichungen und verlangt: 1. Die Gesamtsumme der Abweichungen soll möglichst klein sein, damit die Summe der ausgeglichenen Resultate mit der Summe der beobachteten Daten fast übereinstimmt. Dies heisst mit andern Worten, dass die positiven und negativen Abweichungen gleich sein sollen. 2. Die akkumulierten, d. h. mit Rücksicht auf das Vorzeichen aufsummierten Abweichungen sollen oft Null oder nahezu Null sein, damit zwischen der Summe der ausgeglichenen Resultate und der entsprechenden Summe der Beobachtungsdaten bis zu jeder Stelle der Variablen ein möglichst kleiner Unterschied besteht. Oder dann sollte häufiger Zeichenwechsel eintreten, der zeigt, dass die

akkumulierten Abweichungen bei einem Zwischenwert Null sind. Dadurch kennt man die Stellen, wo die Übereinstimmung am besten ist.

Bei Sterblichkeitstafeln ist es angezeigt, auch wenn die Sterbenswahrscheinlichkeiten selbst ausgeglichen werden, die Zahl der Lebenden unter Risiko einzuführen, den Unterschied zwischen erwarteten und wirklichen Sterbefällen festzustellen und darauf die akkumulierten Abweichungen zu untersuchen. Im grossen ganzen sollten sich ungefähr gleichviel Sterbefälle ergeben. Auf die Herbeiführung voller Übereinstimmung ist jedoch, wenn sie nicht wesentlich ist, nicht zu viel Zeit zu verwenden. Die obige Bemerkung gilt entsprechend bei der Ausgleichung irgend welcher Art von Wahrscheinlichkeiten.

### § 3. Die verschiedenen Methoden.

1. Die frühesten einfachsten Methoden beruhen meist auf einmaliger oder wiederholter arithmetischer Mittelbildung, so z. B. die Formeln von *Filipowski, Wittstein, Finlaison* und *Ansell* [1]), [5]). Wird das Resultat der Mittelbildung als ausgeglichener Wert für die Mitte der Gruppe genommen, so können zufällige Fehler dadurch weggeschafft werden. Es entstehen aber andere, da der Mittelwert aus $n$ Werten einer Funktion nur dann gleich dem wahren Wert an der mittleren Stelle ist, wenn diese linear verläuft.

2. Auf diese Fehler, die bei blosser arithmetischer Mittelbildung entstehen, machte namentlich *Woolhouse* (1809—1893) [9]) aufmerksam, der eine neue, bessere Methode auf Grund eines Interpolationsverfahrens entwickelte. Er fasste die um fünf Einheiten der Variablen entfernten Beobachtungswerte je in einer Serie zusammen. Durch Interpolation der Zwischen-

werte in jeder Serie mit zentralen Differenzen bis zur zweiten erhielt er für jedes $y_x$ fünf Werte, einen aus der Beobachtung und vier aus der Interpolation, und das arithmetische Mittel aus den fünf Werten stellte den ausgeglichenen Wert $y'_x$ dar. Woolhouse hat seine Formel, die den Ausgleichskoeffizienten $^1/_{15}$ hat, oft und mit recht gutem Erfolg angewendet. Zu seiner Zeit entwickelte aber *Sprague* die graphische Methode und im JIA [9]), [12]) entspann sich ein heftiger Streit, welche Art der Ausgleichung besser sei. *Sprague* wendet gegen die Methode von *Woolhouse* ein, dass sie die Unregelmässigkeiten nicht entferne und das Gesetz der Reihe zerstöre.

*Woolhouse* gibt zu, dass einige Unregelmässigkeiten noch bestehen bleiben. Er ist aber zufrieden, wenn sie reduziert oder besser gesagt über die andern Teile der Kurve verteilt werden. Durch Untersuchen der Differenzen können sie übrigens noch weggeschafft werden. Die plötzliche Erniedrigung der Koeffizienten von $\gamma_2$ auf $\gamma_3$ in der *Woolhouse*schen Formel ist die Ursache der meisten Nachausgleichung. Wird sie auf eine regelmässige Zahlenreihe angewendet, so bringt sie allerdings einen Fehler hinein, wenn die Reihe höhere als 3. Differenzen enthält, und zwar infolge ihres theoretischen Fehlers von $-5{,}4\, y^{(IV)} - 9{,}5\, y^{(VI)}$.

*Sprague* untersuchte darauf denselben und fand, dass er, obschon theoretisch begründet, in der Praxis vernachlässigt werden kann. Woolhouse legte auch nicht durch die ganze Beobachtungsreihe eine einzige Kurve, sondern nur durch je 15 Punkte, so dass sich der Fehler immer ein wenig ändert.

Die Methode von *Woolhouse* ist nicht die vollkommenste, damals aber war sie besser als die früheren Ausgleichsverfahren. Heute ist sie jedenfalls immerhin

besonders noch historisch und theoretisch von Interesse. Wichtig war die Einfachheit des Rechenschemas, namentlich des verbesserten von *Ackland* [13]) und *Higham* [6]). Man suchte immer möglichst einfache Formeln, damit die Ausgleichung nicht zu viel Zeit erforderte, denn das moderne Hilfsmittel, die Rechenmaschine, wurde zu jener Zeit erst allmählich eingeführt und verwendet.

*Woolhouse* hat keine Gewichte eingeführt. Er sagte, dass sie nur die Rechnung erschweren und keinen merkbaren Einfluss auf die Resultate haben und dass der Grad der Glaubwürdigkeit der Ausgleichung durch die absolute Häufigkeit der Beobachtungen gegeben werde.

*Schaertlin* [3]) hat nach dem Verfahren von Woolhouse, aber mit dreijährigen Intervallen, eine entsprechende Formel abgeleitet.

3. Einfachere Formeln als die von Woolhouse, die jedoch in der Ausgleichung dasselbe leisten, versuchte *Higham* [6]) zu bringen. Die theoretischen Grundlagen sind vielleicht etwas weniger einfach, aber die Resultate werden schon regelmässiger. Higham leitete seine Formeln nicht auf Grund von Interpolationsformeln ab, sondern indem er das Zentralglied von $m$ Werten einer Reihe, von der angenommen wird, dass sie nach 3. konstanten Differenzen fortschreite, durch die Differenz zwischen gewissen Vielfachen zweier Summationen ausdrückte. Diese Summationen können selbst auch aus mehreren, nacheinander auszuführenden Summationen zusammengesetzt sein. Meistens sind es drei, die sich aber nicht notwendig alle über das gleiche Intervall erstrecken müssen. Würde nur eine Summation genommen, dann entstände wie bei der blossen arithmetischen Mittelbildung ein konstanter Tafelfehler. Durch zwei verschiedene dagegen wird er eliminiert, wenn die

Vielfachen so gewählt werden, dass im Resultat die Differenzen der Reihe bis und mit der dritten verschwinden. Mit mehreren Summationen könnte auch der Fehler in den 4. und 5. Differenzen weggeschafft werden. Es gibt unendlich viele solche Formeln, die aus Summationen entstehen und bis zu dritten Differenzen genau sind. Praktisch kommen aber nur solche in Betracht, die leicht zum Rechnen sind und dazu stark ausgleichen.

Verschiedene Autoren zeigten, dass auch die Formel von *Woolhouse* in Summationsform dargestellt werden kann und also nicht etwas Spezielles ist.

Eine Summation über $n$ Glieder, wo $y_x$ das Zentralglied ist, wird meistens mit dem Symbol $[n]\, y_x$ dargestellt. Nur wenn $n$ ungerade ist wird natürlich $y_x$ selbst in der Summation vorkommen.

*Hardy* [5]) schlägt vor, Formeln zu verwenden, die auf Summationen wie [4][5][6] begründet sind, da sie bessere Resultate ergeben als solche mit gleichen Operationen wie $[5]^3$. Ersetzt man aber in einer Formel $[n]^3$ durch $[n-1][n][n+1]$, so entsteht, wenn sie vorher bis zu den 3. Differenzen genau war, ein Fehler von 1/12 der 2. Differenz. Er behauptet jedoch, dass dieser Fehler nicht grösser sei als der durch Vernachlässigung der 4. Differenzen.

*Todhunter* (1867—1926) [14]) gibt Formeln, die bis zu 5. Differenzen richtig sind. Ferner zeigte er, dass Highams Summationsformel für Woolhouse ein Spezialfall einer allgemeinen Summationsformel ist, die der verallgemeinerten Form der Methode von Woolhouse entspricht, und dass das Mittel der interpolierten Werte, gegeben durch jede ungerade Anzahl von Kurven, durch eine Summationsformel dargestellt werden kann. Es ist leicht einzusehen, dass die Summationsmethode für

das Aufstellen von Ausgleichsformeln allgemeiner ist als die Interpolationsmethode, da sie zu Formeln führt, für die keine vernünftige Interpolation gefunden werden kann.

Viele Formeln hat *Spencer* [8]) hergeleitet, wovon die meistverwendete lautet:

$$350 y'_x = [7][5]^2 \{[1] + [3] + [5] - [7]\}\ y_x = [7][5]^2 \{2\ y_x + \gamma_1 - \gamma_3\}$$

oder

$$y'_x = 0{,}171\ y_x + 0{,}163\ \gamma_1 + 0{,}134\ \gamma_2 + 0{,}094\ \gamma_3 + 0{,}051\ \gamma_4 + 0{,}017\ \gamma_5 - 0{,}006\ \gamma_6 - 0{,}014\ \gamma_7 - 0{,}014\ \gamma_8 - 0{,}009\ \gamma_9 - 0{,}003\ \gamma_{10}$$

Diese 21gliedrige Formel mit dem theoretischen Fehler $-12{,}6\ y^{(IV)} - 34{,}857\ y^{(VI)}$ und dem Ausgleichungskoeffizienten 1/160 gibt sehr regelmässige Resultate und ist eine der besten mechanischen Ausgleichsformeln.

Eine Formel mit etwas langen Summationen verwendete *Kenchington* [15]).

*Watson* [16]) kombinierte, um den theoretischen Fehler möglichst zu eliminieren, zwei Ausgleichsformeln, deren Fehler entgegengesetzt sind. Der praktische Vorteil seiner Formeln ist aber nicht gross.

4. Den Gedankengang von *Woolhouse* verfolgend, hat *Karup* (1854—1927) [4]) eine neue Ausgleichungsformel abgeleitet. Er verwendete jedoch nicht die einfache Interpolation, sondern die sogenannte oskulatorische Interpolation von *Sprague* [17]), aber nur bis zu den 3. Differenzen. Die Unstetigkeit der 1. Differentialquotienten in den Anschlusspunkten der verschiedenen Parabelstücke wird dadurch aufgehoben, und die Formel liefert viel regelmässigere Resultate. Sie hat den theoretischen Fehler $-7{,}8\ y^{(IV)} - 17{,}5\ y^{(VI)}$ sowie den Ausgleichungskoeffizienten 1/105.

Das Ausgleichsverfahren von *Karup* besteht aber nicht nur in der Anwendung seiner Formel. Sie kommt erst beim letzten von drei Prozessen zur Verwendung. Für eine Sterbetafel werden zuerst die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten nach einer einfachen mechanischen Formel, z. B. nach *Higham*, ausgeglichen. Dann folgt eine Korrektion der erhaltenen Werte auf Grund der wirklichen und rechnungsmässigen Sterbefälle. Dadurch entstehen neue kleine Unregelmässigkeiten, die nun durch eine zweite Ausgleichung nach der Formel von *Karup* entfernt werden. Durch die wiederholte Ausgleichung wird die Regelmässigkeit der Resultate gesteigert, zumal die zweite nach einer Formel vorgenommen wird, die sehr stark ausgleicht. Die eingefügte Korrektion dagegen sorgt dafür, dass man sich trotz der zusammengesetzten Operation nicht zu weit von den Originalbeobachtungen entfernt.

5. *Altenburger* [19]) hat sich in mehreren Arbeiten mit dem Ausgleichungsproblem beschäftigt. Er erachtet als die Aufgabe, die einer jeden Ausgleichsmethode gestellt werden muss, die sukzessive Verbesserung der aus der Erfahrung abgeleiteten rohen Zahlen. Dies wurde auch von *Sprague* und *Karup* so erfasst. Sprague löste die Aufgabe durch Zeichnung und kontrollierende Rechnung, Karup durch Rechnung allein. Beide bedingen eine Probe der gefundenen Zahlen am Urmaterial und eine Korrektur der Abweichungen, bevor an eine weitere Verbesserung geschritten wird. *Altenburger* gibt eine Methode wo dies überflüssig ist, da sie auf dem Gedanken aufgebaut ist, dass die Ausgleichung den Charakter der Kurve auch im Detail möglichst wahren soll. Seine Formeln geben aber nicht bessere Resultate als zum Beispiel die von Karup. Auch müssen sie wiederholt angewendet werden, bis keine merkliche Änderung

mehr stattfindet, und dadurch gehen an den Enden viele Werte verloren.

*Altenburger* suchte auch eine allgemeine Formel für die mechanischen Ausgleichsverfahren. Eine Operation, die alle Kurven vom Grade kleiner als $r + 1$ reproduziert, nennt er vom Grade $r$, z. B. $A_r$, $B_r$ ... und zeigt, dass es möglich ist, durch geeignete Kombination der Operation $A_r$ und ihren Wiederholungen $A_r^2 \ldots A_r^m$ Kurven von höherem Grade als $r$, also allgemein $y_x$ zu reproduzieren. Durch entsprechende Wahl von $A$ und $m$ wird die Formel den Erfordernissen eines beliebigen Materials angepasst. Es können natürlich statt $A$ und den Wiederholungen auch verschiedene Operationen beliebigen Grades zur Bildung von solchen beliebig hohen Grades verwendet werden. *Altenburger* leitet mit geeigneten Operationen die Formeln von *Woolhouse*, *Higham* und *Karup* ab, die alle vom 3. Grade sind.

Der nächstliegende Gedanke zur Ableitung von Formeln ist die Bildung von arithmetischen Mitteln. Dadurch entsteht aber, wie auch schon früher erwähnt wurde, ein Fehler, der wieder korrigiert werden muss, und die Ausgleichsformeln können also dahin interpretiert werden, dass die Deformation, die die Grundoperation an Kurven dritten Grades verursacht, durch eine darauffolgende neue Operation (Korrekturoperation) aufgehoben wird.

Auch *Perutz* [20]) betrachtet die Ausgleichsformel als zusammengesetzt aus Grund- und Korrekturoperation, wo erstere eine $t$fache arithmetische Mittelbildung ist und letztere eine darauffolgende lineare Verbindung der $t$ten Mittelwerte, damit die Formel eine Kurve bestimmten Grades reproduziert. Perutz gibt neue, 11 bis 21gliedrige, sogenannte verbesserte Formeln.

Jede dieser Formeln, wie auch früher abgeleitete, hat die Tendenz, die beobachtete Reihe in eine Kurve bestimmten Grades umzuformen, und zwar um so mehr, je stärker ihre Ausgleichskraft ist. Eine solche Umformung der ursprünglichen Kurve kann jedoch nicht die Absicht der Ausgleichung sein, die im allgemeinen bloss bezweckt, gewisse Unebenheiten zu eliminieren und im übrigen den beobachteten Kurvencharakter möglichst getreu wiederzugeben. Es ist daher zu vermeiden, zur Ausgleichung eine Formel zu verwenden, die allzu stark glättet; vielmehr sollte eine solche mit möglichst geringer, jedoch zur Wegschaffung störender Unebenheiten gerade hinreichender Ausgleichskraft gewählt werden. *Perutz* suchte auch nicht, dieselbe zu erhöhen, sondern die zur Erzielung einer bestimmten Ausgleichskraft erforderliche Anzahl Glieder möglichst zu verringern, damit die in der Ausgleichsformel vereinigten Beobachtungswerte näherungsweise gleiches Beobachtungsgewicht besitzen. Auch sind so charakteristische Merkmale einer Kurve der Gefahr der Deformierung durch das Ausgleichsverfahren in geringerem Masse ausgesetzt.

Noch erwähnt soll vielleicht hier die mechanische Methode von *Wirtinger*[10]) werden, der die Fredholmschen Integralgleichungen verwendet.

6. Auf ganz andern Grundlagen aufgebaut als die Summationsformeln ist folgende Ausgleichsmethode: Den Beobachtungsdaten $y_{x-k} \cdots y_x \cdots y_{x+k}$ wird eine Parabel $n$ten Grades $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ angepasst und die Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Ordinate bei $x = 0$ wird als ausgeglichener Wert von $y_x$ betrachtet. Je nach der Wahl von $k$ und $n$ erhält man verschiedene Ausgleichsformeln. Eine grosse Anzahl solcher Formeln geben *Whittaker* und *Robinson* [21]), ferner *Dizler* [22]), der

auch asymmetrische zur Ausgleichung der Enden herleitete. *Sheppard* [23]) erhält durch Reduktion des mittleren Fehlerquadrates dieselben Formeln.

Eine neue Ausgleichungsmethode hat *Rhodes* [24]) abgeleitet, indem er die Methode der kleinsten Quadrate und die oskulatorische Interpolation von *Sprague* kombinierte. Die Methode liefert aber nicht viel bessere Resultate als andere gute Ausgleichsverfahren.

Die Methode der kleinsten Quadrate wird verwendet, weil man annimmt, dass das System der Fehler dem normalen Gesetz folge. Bei den meisten Ausgleichsmethoden ist dies der Fall. Die Fehlerverteilung ist nach der Ausgleichung so, dass 1. die kleineren Fehler öfter vorkommen als die grösseren, 2. gleichviel positive wie negative auftreten und 3. kein Fehler ausserhalb der Ordnung der Wahrscheinlichkeit liegt. Unter Fehler versteht man hier die Differenz zwischen beobachteten und ausgeglichenen Werten.

In der Praxis verwendet man immer noch mehr die Summationsformeln als die hier erwähnten, da ihre Anwendung noch nicht so ausgearbeitet ist.

7. Die Methode der kleinsten Quadrate betrachtet *Whittaker* [21]) vom theoretischen Standpunkt aus als nicht befriedigend, da sie ein willkürliches Element, nämlich die spezielle Wahl der Kurve, die den Beobachtungen angepasst werden soll, enthält. Er selbst will alles Wesentliche, d. h. die beobachteten Werte und die Betrachtung, dass die wahren Werte eine glatte Kurve bilden, kombinieren, um den wahrscheinlichsten Wert von $y$ zu erhalten. Dazu müssen die ausgeglichenen $y'$ folgende Differenzengleichung erfüllen:

$$\varepsilon\, y'_x - \Delta^6\, y'_{x-3} = \varepsilon\, y$$

Mit wachsendem Parameter $\varepsilon$ nimmt die Treue der Ausgleichung, gemessen durch die Kleinheit von $\Sigma\,(y - y')^2$, zu, dagegen die Glätte, gemessen durch die Kleinheit von $\Sigma\,(\Delta^3\,y')^2$, ab.

Mit obiger Differenzengleichung lässt sich zeigen, dass die Momente 0., 1. und 2. Ordnung für die ausgeglichenen Werte dieselben sind wie für die Originaldaten. Die Gleichheit in den Momenten ist aber äquivalent der Gleichheit in den sukzessiven Summationen, also kann diese Eigenschaft auch in der Form ausgedrückt werden, dass die 1., 2. und 3. Summen von $(y - y')$ alle verschwinden.

Die Ausgleichsformeln von *Whittaker* haben die allgemeine Form (1). Sie können auch in Summationsform dargestellt werden, jedoch nicht so einfach wie früher erwähnte Summationsformeln, die als solche abgeleitet wurden. Whittaker gibt für verschiedene $\varepsilon$ die Koeffizienten $a_k$, die Ausgleichskraft und noch Koeffizienten $j_k$. Damit können die Beobachtungsreihen an den Enden ergänzt werden, so dass man für jedes rohe $y$ auch ein ausgeglichenes $y'$ erhält.

8. Bei der Ausgleichung zweifach abgestufter Tafeln könnte man versuchen, dem ganzen Bereich der unausgeglichenen Werte oder einzelnen Teilen desselben eine möglichst einfache Fläche anzupassen und die Parameter z. B. aus der Forderung der Volumengleichheit zu bestimmen, ähnlich wie bei den Kurven. Diese analytische Art der Ausgleichung ist jedoch recht mühsam, wenn nicht fast ausgeschlossen.

Am einfachsten ist eine mechanische Methode analog der von *Wittstein*, d. h. man bestimmt das arithmetische Mittel aus dem beobachteten Wert und den beiderseits in beiden Richtungen benachbarten. Zweckmässig ist

auch die getrennte Ausgleichung von Zeilen und Kolonnen nach irgend einer mechanischen Formel, worauf man als ausgeglichenen Wert das arithmetische Mittel aus den beiden so erhaltenen Werten nimmt.

## II. Die Ausgleichungsmethode von King.

### § 1. Die oskulatorische Interpolation.

Bei einer Reihe von Zahlen, die nach einem bestimmten Gesetz verläuft, bietet die Interpolation keine Schwierigkeiten. Aber oft muss man zwischen Werten interpolieren, die nicht streng einem mathematischen Gesetz folgen. Die Interpolation, die gleichbedeutend ist mit dem Zeichnen einer Kurve zwischen den Werten, ist auf viele Arten möglich. Man kann mit einer Kurve interpolieren, so dass die 2., 3. oder höhere Differenzen zwischen den interpolierten Werten konstant werden. Je höher die Ordnung der Differenzen ist, die konstant sein sollen, desto mehr Bedingungen kann man der Kurve auferlegen und desto glatter wird die Verbindung zwischen den verschiedenen Kurvenstücken sein. Aber jede höhere Ordnung vermehrt die Arbeit der Ausrechnung und es ist deshalb wünschenswert, die niedrigste anzunehmen, mit der befriedigende Resultate erhalten werden können.

*Sprague* [17]) leitete ein besonderes Interpolationsverfahren folgendermassen ab: $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, $y_5$ seien die Ordinaten bei äquidistanten Abszissen und zwischen $y_2$ und $y_3$ ist mit konstanten 5. Differenzen zu interpolieren. Die Kurve zwischen $y_2$ und $y_3$ soll aber glatt an die anliegenden Kurvenstücke anschliessen. Dies ist der Fall, wenn die in $y_2$ resp. $y_3$ zusammentreffenden Kurvenstücke in diesen Punkten gleiche Tangenten und Krümmungsradien haben. Dazu müssen

die ersten und zweiten Differentialquotienten für die zwei Kurven in den betreffenden Punkten übereinstimmen. Sprague bestimmte sie mit einer Kurve 4. Ordnung. Die obige Interpolation wird wegen der erwähnten Eigenschaften die oskulatorische genannt.

Wird die oskulatorische Interpolation auf eine Reihe angewendet, die bis in die 5. Ordnung genau ist, so werden die interpolierten Werte in den 5. Differenzen einen Fehler aufweisen, weil die Differentialquotienten nur aus Kurven 4. Ordnung bestimmt wurden. Die Verbindung zwischen den Kurvenstücken ist jedoch glatt. Wird sie auf Reihen höherer Ordnung angewendet, oder auf Funktionen die nicht rational sind und ganz, so kann dieser Fehler in der 5. Differenz als approximative Korrektion für die nicht berücksichtigten höheren Ordnungen angesehen werden. Mit der gewöhnlichen Interpolation bis zu 5. Differenzen wird eine Reihe 5. Ordnung genau wiedergegeben, bei höherer Ordnung oder nicht ganzen rationalen Funktionen entsteht jedoch auch ein Fehler und dazu noch ein Unterbruch in der Kontinuität der Wertereihe.

Die Rechnung nach der Interpolationsformel von *Sprague* ist wegen der vielen Differenzen etwas kompliziert. *King* [18]) hat deshalb unter Beibehaltung des Gedankenganges von Sprague eine neue Formel abgeleitet, die bis in die 3. Differenzen genau ist und nur die 1. Differentialquotienten berücksichtigt. Da die 2. Differentialquotienten ausser acht gelassen werden, haben die Kurvenstücke in den Berührungspunkten nur mehr gleiche Tangenten, nicht aber notwendig gleiche Krümmungsradien. Die Interpolation ist daher nicht mehr oskulatorisch, sondern nur noch tangierend. In Anlehnung an die meisten Autoren soll sie jedoch im folgenden auch als oskulatorisch bezeichnet werden, mit

der jeweiligen Bemerkung, ob sie bis zu 5. oder nur bis zu 3. Differenzen genau ist. *Karup* [4]) hat die gleiche Interpolationsformel in etwas anderer Weise hergeleitet.

Will man bei der gewöhnlichen Interpolation nur bis zu 3. Differenzen gehen statt bis zu 5., so kann man in der Formel einfach die höheren Glieder weglassen. Bei der oskulatorischen muss dagegen das Ganze neu behandelt werden.

Es seien nun 4 äquidistante Punkte gegeben: $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$. Zwischen $y_1$ und $y_2$ ist mit 3. Differenzen so zu interpolieren, dass eine glatte Verbindung entsteht, wenn zwischen $y_0$ und $y_1$ sowie zwischen $y_2$ und $y_3$ gleich verfahren wird. Die zwei Kurven, die sich in $y_1$ resp. $y_2$ treffen, müssen in diesen Punkten gleiche Tangenten, d. h. gleiche erste Differentialquotienten haben. Diese werden mit einer Kurve 2. Ordnung gefunden, die durch $y_0$, $y_1$, $y_2$ resp. $y_1$, $y_2$, $y_3$ geht.

Die Interpolationskurve 3. Ordnung zwischen $y_1$ und $y_2$ lautet:

$$y_{1+x} = y_1 + ax + bx^2 + cx^3 \qquad (5)$$

Da sie durch $y_2$ gehen muss, gilt für $x = 1$:

$$y_2 = y_1 + a + b + c$$

Der erste Differentialquotient der Kurve ist allgemein:

$$\frac{dy_{1+x}}{dx} = a + 2bx + 3cx^2$$

Für $x = 0$ erhält man denselben in $y_1$ und für $x = 1$ in $y_2$:

$$\frac{dy_1}{dx} = a \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx} = a + 2b + 3c$$

Die Kurve 2. Ordnung durch $y_0$, $y_1$, $y_2$ kann wie folgt dargestellt werden:

$$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 y_0 = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{1}{2}(x^2 - x)\Delta^2 y_0$$

Weiter ist:

$$\frac{dy_x}{dx} = \Delta y_0 + \frac{1}{2}(2x - 1)\Delta^2 y_0$$

und für $x = 1$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \Delta y_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0$$

Entsprechend lautet die Kurve 2. Ordnung durch $y_1$, $y_2$, $y_3$:

$$y_{1+x} = y_1 + x\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x^2 - x)\Delta^2 y_1$$

und weiter:

$$\frac{dy_{1+x}}{dx} = \Delta y_1 + \frac{1}{2}(2x - 1)\Delta^2 y_1$$

Für $x = 1$ erhält man:

$$\frac{dy_2}{dx} = \Delta y_1 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 = \Delta y_0 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{2}\Delta^3 y_0$$

Durch Gleichsetzen der entsprechenden Differentialquotienten ergibt sich:

$$\frac{dy_1}{dx} = a \quad = \Delta y_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 \qquad (\alpha)$$

und

$$\frac{dy_2}{dx} = a + 2b + 3c = \Delta y_0 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{2}\Delta^3 y_0 \quad (\beta)$$

Eine weitere Beziehung für die Unbekannten $a$, $b$, $c$ erhält man aus

$$a + b + c = y_2 - y_1 = \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \quad (\gamma)$$

Aus den drei Gleichungen $(\alpha)$, $(\beta)$ und $(\gamma)$ kann man die drei Konstanten $a$, $b$, $c$ bestimmen. Sie sind:

$$a = \Delta y_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0$$

$$b = \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{1}{2}\Delta^3 y_0$$

$$c = \frac{1}{2}\Delta^3 y_0$$

Setzt man in (5) ein, so erhält man die Interpolationskurve zwischen $y_1$ und $y_2$. Sie lautet:

$$y_{1+x} = y_1 + x\left(\Delta y_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right) +$$

$$+ x^2\left(\frac{1}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{1}{2}\Delta^3 y_0\right) + x^3\left(\frac{1}{2}\Delta^3 y_0\right)$$

oder

$$y_{1+x} = y_1 + x\Delta y_0 + \frac{x + x^2}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{x^2 - x^3}{2}\Delta^3 y_0 \quad (6)$$

*Lidstone* [25]) zeigte durch eine andere Herleitung der Formel (6), dass sie eine Mischung zweier Kurven $u_{1+x}$ und $v_{1+x}$ in dem Verhältnis $(1 - x)$ und $x$ ist, wo $u_{1+x}$

bzw. $v_{1+x}$ den Wert darstellt zwischen $y_1$ und $y_2$, der mit gewöhnlicher Interpolation aus $y_0$, $y_1$, $y_2$ bzw. $y_1$, $y_2$, $y_3$ erhalten wird. Es ist also hier:

$$y_{1+x} = (1 - x)\, u_{1+x} + x v_{1+x}$$

$$u_{1+x} = y_0 + (x+1)\, \Delta y_0 + \frac{x(x+1)}{2} \Delta^2 y_0$$

$$v_{1+x} = y_1 + x \Delta y_1 + \frac{x(x-1)}{2} \Delta^2 y_1$$

Dasselbe kann für die Formel von *Sprague* gezeigt werden, jedoch gilt dafür ein anderes Mischungsverhältnis.

Um ein Intervall in $t$ gleiche Teile zu teilen, macht *King* $\frac{1}{t}$ zur Einheit. Es wird dann $y_1$ zu $y_t$, $y_2$ zu $y_{2t}$, usw. Ferner ist nun $\Delta y_0 = y_t - y_0$ usw. Die Differenzen zwischen den interpolierten Werten oder die sogenannten unterteilten Differenzen seien mit $\delta$ bezeichnet, die des ursprünglichen Intervalls mit $\Delta$. Die Interpolation erfolgt nun am einfachsten durch Aufsummieren mittels der Leitdifferenzen, worunter man die Anfangsglieder der Differenzenreihen, oft auch mit Einschluss der ursprünglichen Reihe selbst versteht. Die Leitdifferenzen lauten in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \delta y_t &= \frac{\Delta y_0}{t} + \frac{1}{2}(t+1)\frac{\Delta^2 y_0}{t^2} - \frac{1}{2}(t-1)\frac{\Delta^3 y_0}{t^3} \\ \delta^2 y_t &= \frac{\Delta^2 y_0}{t^2} - (t-3)\frac{\Delta^3 y_0}{t^3} \qquad (7) \\ \delta^3 y_t &= 3\frac{\Delta^3 y_0}{t^3} \end{aligned}$$

Ist z. B. $t = 5$, so hat man:

$$\delta y_5 = \frac{\Delta y_0}{5} + 3\frac{\Delta^2 y_0}{5^2} - 2\frac{\Delta^3 y_0}{5^3} = 0{,}200\,\Delta y_0 + 0{,}120\,\Delta^2 y_0 - 0{,}016\,\Delta^3 y_0$$

$$\delta^2 y_5 = \frac{\Delta^2 y_0}{5^2} - 2\frac{\Delta^3 y_0}{5^3} = 0{,}040\,\Delta^2 y_0 - 0{,}016\,\Delta^3 y_0 \quad (8)$$

$$\delta^3 y_5 = 3\frac{\Delta^3 y_0}{5^3} = 0{,}024\,\Delta^3 y_0$$

Zur Durchführung der Rechnung wurden früher die $\Delta$ durch die darunterstehenden Potenzen dividiert und dann durch Multiplikation mit den entsprechenden Koeffizienten und darauffolgender Addition die $\delta$ bestimmt. Mit dem Aufkommen der Rechenmaschine wurde jedoch die zweite Darstellungsart bevorzugt.

Sind nun z. B. fünfjährige Werte gegeben und sollen die einjährigen interpoliert werden, dann bildet man aus der Tafel der ursprünglichen Werte die 1., 2. und 3. Differenzen, d. h. $\Delta$, $\Delta^2$, $\Delta^3$ und berechnet damit nach obigen Formeln die unterteilten Differenzen $\delta$, $\delta^2$, $\delta^3$. Es ist zu beachten, dass die $\delta$ für das fünfjährige Intervall, das bei $x$ beginnt, aus den $\Delta$, die $(x - 5)$ entsprechen, gebildet werden. Die Zwischenwerte erhält man durch Addition wie folgt:

$$\begin{aligned}
y_5 &= y_5 \\
y_6 &= y_5 + \delta y_5 \\
y_7 &= y_6 + \delta y_6 = y_6 + \delta y_5 + \delta^2 y_5 \\
y_8 &= y_7 + \delta y_5 + 2\,\delta^2 y_5 + \delta^3 y_5 \\
y_9 &= y_8 + \delta y_5 + 3\,\delta^2 y_5 + 3\,\delta^3 y_5 \qquad (9) \\
y_{10} &= y_9 + \delta y_5 + 4\,\delta^2 y_5 + 6\,\delta^3 y_5
\end{aligned}$$

Zur Kontrolle dient, dass jeder nächsthöhere fünfjährige Wert von $y$, also hier $y_{10}$ usw., wiedergegeben werden muss. Die Reproduktion dieser Werte ist jedoch noch kein Beweis für die Genauigkeit der Rechnung, da sie schon erfolgt, wenn die Beziehung $y_{10} - y_5 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0$ erfüllt ist. Praktische Erfahrungen zeigen, dass es nötig ist mit zwei oder besser drei Dezimalen mehr zu rechnen als im Resultat gewünscht werden.

Beim ersten und letzten Intervall der Reihe muss anders interpoliert werden, da man keine entsprechenden $\Delta$ hat. Man kann aber z. B. annehmen, dass die 2., 3. oder 4. Differenzen konstant sind.

*King* [18]) hat zuerst, um mechanische Ausgleichsformeln zu erhalten, seine Interpolationsformel auf Summen $y_x = \sum_0^{x-1} u_x$, wo $u$ der auszugleichende Wert ist, angewendet. Diese Formeln, die auf oskulatorischen Kurven aufgebaut sind und schliesslich von Summen $w_x = u_x + u_{x+1} + \ldots + u_{x+t-1}$, d. h. von einer Gruppe von Werten $u_x$, abhängen, bezeichnet er als aus gruppierten oskulatorischen Kurven abgeleitet. Für $t = 5$ erhält er, in Summationsform dargestellt, die Formel:

$$\begin{aligned} 625\, u'_x &= [5]^3 \left\{5[3] + 4[5] - 2[5][3]\right\} u_x \\ &= [5]^3 \left\{3[3]\, u_x - 2\, \gamma_3\right\} \end{aligned} \qquad (10)$$

die mit der erwähnten Formel von Karup identisch ist. Letztere wurde jedoch etwas anders abgeleitet. Zum Unterschied bildet er noch andere Formeln mit gruppierten gewöhnlichen Kurven. Sie bieten aber mehr nur theoretisches Interesse und gleichen nicht so gut aus wie die andern, jedoch etwas besser als Formeln, die man mit einzelnen gewöhnlichen Kurven erhält, wie z. B. nach dem Prinzip von *Woolhouse*.

## § 2. Die Kingsche Ausgleichungsmethode.

1. Die bekannte Kingsche Ausgleichungsmethode besteht jedoch nicht in der Anwendung der in § 1 erwähnten Formeln. King [26]) hat noch eine andere neue Methode entwickelt, bei der zuerst fünfjährige ausgeglichene Werte der auszugleichenden Reihe, die *Kardinalpunkte* genannt seien, festgelegt und dann durch *oskulatorische Interpolation* die Zwischenwerte eingeschaltet werden. King suchte mit seiner Methode nicht etwas Besseres als z. B. die 21gliedrige Formel von *Spencer*, die viel verwendet wurde. Er wollte jedoch etwas, das ebenso gut ist und dazu schneller geht. Das ganze Verfahren soll hier nur bis zu 3. Differenzen genau durchgeführt werden, da die resultierenden Formeln einfacher sind als wenn noch mit höheren Differenzen gerechnet wird. Zudem genügen, wie schon King selbst darlegte, für die praktische Anwendung diese einfacheren Formeln.

2. Die Kardinalpunkte werden nun wie folgt bestimmt. Die rohen jährlichen Beobachtungswerte seien $u_0$, $u_1$, ... $u_x$, ..., und aus der Reihe der 15 Werte $u_0$, $u_1$, ... $u_{14}$ soll das Zentralglied $u_7$ ausgeglichen werden.

Bedeutet $y_x = \sum_0^{x-1} u_x$ und analog $y_{x+1} = \sum_0^{x} u_x$, so kann $u_x$ dargestellt werden als Differenz: $u_x = y_{x+1} - y_x$. Speziell ist dann:

$$u_7 = y_8 - y_7 \tag{11}$$

Von den $y_x$ werden nur fünfjährige Werte betrachtet, z. B. $y_0$, $y_5$, $y_{10}$, $y_{15}$, und die Differenzen für die fünfjährigen Intervalle seien mit $\Delta y$, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ bezeichnet.

$y_x$ lässt sich nun mit Hilfe dieser Werte folgendermassen darstellen:

$$y_x = y_0 + \binom{x}{1} \Delta\, y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2\, y_0 + \binom{x}{3} \Delta^3\, y_0 + \cdots$$

Bleibt man bei den 3. Differenzen stehen, so ergibt sich für $y_8$ und $y_7$:

$$y_8 = y_0 + \frac{8}{5} \Delta\, y_0 + \frac{12}{25} \Delta^2\, y_0 - \frac{8}{125} \Delta^3\, y_0$$

$$y_7 = y_0 + \frac{7}{5} \Delta\, y_0 + \frac{7}{25} \Delta^2\, y_0 - \frac{7}{125} \Delta^3\, y_0$$

Durch Einsetzen in (11) erhält man den ausgeglichenen Wert $u_7'$:

$$u_7' = \frac{1}{5} \Delta\, y_0 + \frac{1}{5} \Delta^2\, y_0 - \frac{1}{125} \Delta^3\, y_0 \qquad (12)$$

Die Differenzen $\Delta\, y$ sind hier Summen von fünf Werten der Funktion $u$ und sollen mit $w$ bezeichnet werden. Es ist also:

$$\Delta\, y_0 = w_0 = y_5 - y_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$\Delta\, y_5 = w_5 = y_{10} - y_5 = u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$$

. . . . . .

Diese Fünfergruppen werden nun als primäre Funktionen behandelt. Ihre Differenzen lauten $\Delta\, w$, $\Delta^2 w$, wobei $\Delta w = \Delta^2 y$ und $\Delta^2 w = \Delta^3 y$ ist. Durch Einführen der $w$ geht die Formel (12) über in:

$$u_7' = 0{,}2\, w_0 + 0{,}2\, \Delta\, w_0 - 0{,}008\ \Delta^2\, w_0$$

oder $$u_7' = 0{,}2\, w_5 - 0{,}008\, \Delta^2\, w_0$$

weil $$w_0 + \Delta\, w_0 = w_5$$

Für den allgemeinen Index $x$ heissen die obigen Formeln:

$$u'_{x+7} = 0{,}2\, w_x + 0{,}2\, \Delta w_x - 0{,}008\, \Delta^2 w_x \qquad (13)$$

$$u'_{x+7} = 0{,}2\, w_{x+5} - 0{,}008\, \Delta^2 w_x \qquad (13\,a)$$

oder, in den unausgeglichenen Werten der $u$ dargestellt:

$$\begin{aligned} u'_x = {} & 0{,}216\, u_x + 0{,}216\, (\gamma_1 + \gamma_2) - \\ & - 0{,}008\, (\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7) \end{aligned} \qquad (13\,b)$$

Der theoretische Fehler dieser Formel ist $-33{,}6\, u^{(IV)} - 1464\, u^{(VI)}$.

Die Formel (13) kann zur stärkern Ausgleichung auch zweimal angewendet werden. Dazu werden die $w_x = u_x + u_{x+1} + u_{x+2} + u_{x+3} + u_{x+4}$ für jedes Alter $x$ berechnet und darauf noch für jedes fünfte $x$ die Fünfergruppen $w_x^{(2)}$. Wendet man die Formel (13) auf diese $w_x^{(2)}$ an, erhält man zuerst ausgeglichene fünfjährige Werte von $w_x$ und durch eine zweite Anwendung die Kardinalpunkte $u'_x$.

3. Sind die Kardinalpunkte bestimmt, so schaltet man die Zwischenwerte mittels der oskulatorischen Interpolation ein. Die Leitdifferenzen für jedes Intervall werden nach den früher abgeleiteten Formeln (8) berechnet. Für die Kardinalpunkte $u'_{x+7}$ heissen sie:

$$\begin{aligned} \delta\, u'_{x+7} &= 0{,}200\, \Delta\, u'_{x+2} + 0{,}120\, \Delta^2 u'_{x+2} - 0{,}016\, \Delta^3 u'_{x+2} \\ \delta^2 u'_{x+7} &= \qquad\quad 0{,}040\, \Delta^2 u'_{x+2} - 0{,}016\, \Delta^3 u'_{x+2} \\ \delta^3 u'_{x+7} &= \qquad\qquad\quad 0{,}024\, \Delta^3 u'_{x+2} \end{aligned} \qquad (14)$$

Durch Aufsummieren erhält man schliesslich die Zwischenwerte $u'_{x+8}$, $u'_{x+9}$, usw.

4. Nach dem Gedankengang von *King* versuchte *Braun* [27]) eine neue Formel abzuleiten, und zwar durch

Zusammenfassen der Werte in Vierergruppen. Es besteht aber so keine Symmetrie zum Mittelwert. Für die Zwischenwerte verwendete er nicht mehr die oskulatorische Interpolation, sondern zweimalige Interpolation in die Mitte.

Prinzipiell können beliebige Gruppen gebildet werden, jedoch ergeben sich mit der von King durchgeführten Fünfergruppierung die einfachsten Koeffizienten. King hatte seine Methode zuerst bis zu 5. Differenzen genau abgeleitet. Es zeigte sich jedoch, dass die einfachere Rechnung mit 3. Differenzen ebenso brauchbare Resultate ergibt.

*Yule* [28]) gibt eine Verallgemeinerung der Kardinalpunktbestimmung und weist auf ihre Beziehung zu einer graphischen Methode hin.

### § 3. Interpolation durch Korrektion der letzten Differenzenreihe.

Wenn man, wie bei der Kingschen Ausgleichungsmethode, nicht nur einen einzelnen interpolierten Wert berechnen soll, sondern eine Reihe von Werten für äquidistante Intervalle einzuschalten hat, so geht man bei der gewöhnlichen Interpolation $n$ten Grades meist nach folgender Überlegung vor: da die $n$ten unterteilten Differenzen $\delta^n$ immer konstant bleiben, solange nicht neue Werte der Hauptreihe in Betracht kommen, so besteht die Rechnung in einer sukzessiven Addition der Differenzen. Oft ist dieses Verfahren auch vorteilhaft, wenn die $\delta^n$ nicht konstant sind. Mit neueintretenden Werten der Hauptreihe müssen aber ausser den $\delta^n$ auch die zugehörigen $\delta$, $\delta^2$, ... $\delta^{n-1}$ neu bestimmt werden. *Karup* [4]) hat nun gezeigt, dass diese Operationen auf die Berechnung der für die ersten Werte einer Reihe gültigen Leitdifferenzen und eine sukzessive Korrektion

der letzten Differenzenreihe allein beschränkt werden können. Dieser Weg ist nicht immer praktisch. Aber gerade bei der oskulatorischen Interpolation ist er besonders einfach und ebenso recht gut bei der gewöhnlichen, wenn sie den 3. Grad nicht überschreitet.

Das Verfahren soll nun für die oskulatorische Interpolation 3. Grades gezeigt werden. Die Interpolationskurve ist durch (6) gegeben, oder, was dasselbe ist:

$$y_{1+x} = y_1 + x\,\Delta\,y_0 + \frac{x\,(x+1)}{2}\,\Delta^2\,y_0 + \frac{x^2\,(x-1)}{2}\,\Delta^3\,y_0$$

Macht man $^1/_5$ zur Einheit und setzt $x = \frac{k}{5}$, ferner $y_x = u_k$, $y_1 = u_5$, $y_2 = u_{10}$, so dass also aus der ursprünglichen Reihe

$$y_0 \qquad\qquad y_1 \qquad\qquad y_2 \quad \cdots$$

die neue $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7,\ u_8,\ u_9,\ u_{10},\ \ldots$

abzuleiten ist, dann kann man die Interpolationskurve für das Intervall 5 bis 10 wie folgt darstellen:

$$u_{5+k} = u_5 + k\,\frac{\Delta\,u_0}{5} + \frac{k\,(k+5)}{2}\,\frac{\Delta^2\,u_0}{5^2} + \frac{k^2\,(k-5)}{2}\,\frac{\Delta^3\,u_0}{5^3} \quad (\alpha)$$

Die $\Delta$ beziehen sich immer noch auf fünfjährige Differenzen.

Um die entsprechende Formel für das folgende Intervall 10 bis 15 zu erhalten, müssen alle Indizes um fünf erhöht werden. Sie heisst dann:

$$u_{10+k} = u_{10} + k\,\frac{\Delta\,u_5}{5} + \frac{k\,(k+5)}{2}\,\frac{\Delta^2\,u_5}{5^2} + \frac{k^2\,(k-5)}{2}\,\frac{\Delta^3\,u_5}{5^3}$$

oder in den früheren Differenzen ausgedrückt:

$$u_{10+k} = u_5 + (k+5)\frac{\Delta u_0}{5} + \frac{(k+5)(k+10)}{2}\frac{\Delta^2 u_0}{5^2} +$$

$$+ \frac{k(k^2+25)}{2}\frac{\Delta^3 u_0}{5^3} + \frac{k^2(k-5)}{2}\frac{\Delta^4 u_0}{5^3} \qquad (\beta)$$

Setzt man in ($\alpha$) $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und in ($\beta$) $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, wobei $k = 0$ in ($\beta$) mit $k = 5$ in ($\alpha$) zusammenfällt, so erhält man die neue Reihe $u_5, u_6, u_7, \ldots u_{15}$.

Zur Abkürzung kann man schreiben:

$$\frac{\Delta^q u_p}{5^q} = d_p^q$$

Es ist dann z. B.:

$$\frac{\Delta^4 u_p}{5^3} = 5\frac{\Delta^4 u_p}{5^4} = 5\,d_p^4$$

Aus der Hauptreihe der $u$ bildet man nun die 1., 2. und 3. Differenzen und erhält folgendes Schema:

| x | Hauptreihe: $u_x$ | 1. Differenzenreihe: $\delta u_x$ |
|---|---|---|
| 5 | $u_5$ | $d_0 + 3d_0^2 - 2d_0^3$ |
| 6 | $u_5 + d_0 + 3d_0^2 - 2d_0^3$ | $d_0 + 4d_0^2 - 4d_0^3$ |
| 7 | $u_5 + 2d_0 + 7d_0^2 - 6d_0^3$ | $d_0 + 5d_0^2 - 3d_0^3$ |
| 8 | $u_5 + 3d_0 + 12d_0^2 - 9d_0^3$ | $d_0 + 6d_0^2 + d_0^3$ |
| 9 | $u_5 + 4d_0 + 18d_0^2 - 8d_0^3$ | $d_0 + 7d_0^2 + 8d_0^3$ |
| 10 | $u_5 + 5d_0 + 25d_0^2$ | $d_0 + 8d_0^2 + 13d_0^3 - 10d_0^4$ |
| 11 | $u_5 + 6d_0 + 33d_0^2 + 13d_0^3 - 10d_0^4$ | $d_0 + 9d_0^2 + 16d_0^3 - 20d_0^4$ |
| 12 | $u_5 + 7d_0 + 42d_0^2 + 29d_0^3 - 30d_0^4$ | $d_0 + 10d_0^2 + 22d_0^3 - 15d_0^4$ |
| 13 | $u_5 + 8d_0 + 52d_0^2 + 51d_0^3 - 45d_0^4$ | $d_0 + 11d_0^2 + 31d_0^3 + 5d_0^4$ |
| 14 | $u_5 + 9d_0 + 63d_0^2 + 82d_0^3 - 40d_0^4$ | $d_0 + 12d_0^2 + 43d_0^3 + 40d_0^4$ |
| 15 | $u_5 + 10d_0 + 75d_0^2 + 125d_0^3$ | |

| x | 2. Differenzenreihe: $\delta^2 u_x$ | 3. Differenzenreihe: $\delta^3 u_x$ |
|---|---|---|
| 5 | $d_0^2 - 2d_0^3$ | $3d_0^3$ |
| 6 | $d_0^2 + d_0^3$ | $3d_0^3$ |
| 7 | $d_0^2 + 4d_0^3$ | $3d_0^3$ |
| 8 | $d_0^2 + 7d_0^3$ | $-2d_0^3 - 10d_0^4 = -2d_0^3$ |
| 9 | $d_0^2 + 5d_0^3 - 10d_0^4$ | $-2d_0^3$ |
| 10 | $d_0^2 + 3d_0^3 - 10d_0^4$ | $3d_0^3 + 15d_0^4 = 3d_5^3$ |
| 11 | $d_0^2 + 6d_0^3 + 5d_0^4$ | $3d_0^3 + 15d_0^4 = 3d_5^3$ |
| 12 | $d_0^2 + 9d_0^3 + 20d_0^4$ | $3d_0^3 + 15d_0^4 = 3d_5^3$ |
| 13 | $d_0^2 + 12d_0^3 + 35d_0^4$ | |

Zur Erklärung der Zusammenfassungen sei z. B. die folgende durchgeführt:

$$3\,d_0^3 + 15\,d_0^4 = 3\,\frac{\Delta^3 u_0}{5^3} + 15\,\frac{\Delta^4 u_0}{5^4} = 3\,\frac{\Delta^3 u_0}{5^3} +$$

$$+ 3\,\frac{\Delta^4 u_0}{5^3} = 3\,\frac{\Delta^3 u_5}{5^3} = 3\,d_5^3$$

Aus obiger Darstellung ersieht man leicht, dass nun die neue Reihe gebildet werden kann, wenn man nur die ersten Leitdifferenzen $u_5$, $\delta u_5$, $\delta^2 u_5$, dafür aber alle aufeinanderfolgenden $\delta^3 u$ kennt, wobei die Rechenregel für die Bestimmung dieser letzteren sehr einfach ist. Die übrigen Differenzen und schliesslich die $u$ selbst erhält man durch suksessive Addition.

Die Formeln für die Differenzen sollen hier noch mit allgemeinem Index zusammengestellt werden. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\delta u_{x+5} &= d_x + 3d_x^2 - 2d_x^3 = 0{,}200\,\Delta u_x + 0{,}120\,\Delta^2 u_x - 0{,}016\,\Delta^3 u_x \\
\delta^2 u_{x+5} &= d_x^2 - 2d_x^3 = 0{,}040\,\Delta^2 u_x - 0{,}016\,\Delta^3 u_x \qquad (15) \\
\delta^3 u_{x+5} &= 3d_x^3 = 0{,}024\,\Delta^3 u_x
\end{aligned}$$

Diese Formeln entsprechen natürlich den schon früher angegebenen für die Leitdifferenzen. Die ganze Rechnung musste aber durchgeführt werden, um das Gesetz für die aufeinanderfolgenden $\delta^3 u$ zu erhalten. Es heisst:

$$
\begin{aligned}
\delta^3 u_{x+5} &= 3 d^3_x &&= 0{,}024\, \Delta^3 u_x \\
\delta^3 u_{x+6} &= 3 d^3_x &&= 0{,}024\, \Delta^3 u_x \\
\delta^3 u_{x+7} &= 3 d^3_x &&= 0{,}024\, \Delta^3 u_x \\
\delta^3 u_{x+8} &= -2 d^3_{x+5} &&= -0{,}016\, \Delta^3 u_{x+5} \\
\delta^3 u_{x+9} &= -2 d^3_x &&= -0{,}016\, \Delta^3 u_x \\
\\
\delta^3 u_{x+10} &= 3 d^3_{x+5} &&= 0{,}024\, \Delta^3 u_{x+5} \\
\delta^3 u_{x+11} &= 3 d^3_{x+5} &&= 0{,}024\, \Delta^3 u_{x+5} \\
\delta^3 u_{x+12} &= 3 d^3_{x+5} &&= 0{,}024\, \Delta^3 u_{x+5} \\
\delta^3 u_{x+13} &= -2 d^3_{x+10} &&= -0{,}016\, \Delta^3 u_{x+10} \\
\delta^3 u_{x+14} &= -2 d^3_{x+5} &&= -0{,}016\, \Delta^3 u_{x+5}
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

.....

Es muss schliesslich noch untersucht werden, ob das ursprüngliche System über das neue, abgeleitete hinausreicht, oder ob beide bei demselben Wert beginnen. Im ersten Fall gelten die oben angegebenen Formeln. Im zweiten Fall muss man für die Interpolation im ersten Intervall ein Gesetz ohne Oskulation im Anfangspunkt annehmen. Am besten lässt man diejenige Kurve gelten, mit der die Ableitung im ersten Übergangspunkt bestimmt wurde, also hier die betreffende Kurve 2. Grades. Dann ist:

$$\Delta^3 u_x = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta^2 u_x = \Delta^2 u_{x+5}$$

und der Anfang des Systems ist mit folgenden Differenzen gegeben:

$$\delta u_{x+5} = 0{,}2\,\Delta u_x + 0{,}12\,\Delta^2 u_{x+5} = 0{,}2\,\Delta u_{x+5} - 0{,}2\,\Delta^2 u_{x+5} + 0{,}12\,\Delta^2 u_{x+5}$$

$$= 0{,}2\,\Delta u_{x+5} - 0{,}08\,\Delta^2 u_{x+5} \qquad (17)$$

$$\delta^2 u_{x+5} = 0{,}04\,\Delta^2 u_{x+5}$$

Die Reihe der aufeinanderfolgenden $\delta^3 u$ bleibt gleich, bis auf einige Glieder, die gleich Null zu setzen sind. Sie lautet:

$$\delta^3 u_{x+5} = \delta^3 u_{x+6} = \delta^3 u_{x+7} = 0$$

$$\delta^3 u_{x+8} = -0{,}016\,\Delta^3 u_{x+5}$$

$$\delta^3 u_{x+9} = 0 \qquad (18)$$

$$\delta^3 u_{x+10} = 0{,}024\,\Delta^3 u_{x+5}$$

.....

Man ersieht leicht, dass von $\delta^3 u_{x+10}$ an wieder die durch die frühern Formeln gegebene allgemeine Rechenregel gilt.

Für das Ende verlieren die Formeln wieder ihre Gültigkeit, wenn die ursprüngliche Reihe nicht über die abzuleitende hinausreicht. Man kann wie am Anfang für das letzte Intervall diejenige Kurve 2. Grades gelten lassen, die durch die drei letzten Punkte $u_\omega$, $u_{\omega-5}$, $u_{\omega-10}$ gelegt und mit der die Ableitung in $u_{\omega-5}$ bestimmt wurde. Zu diesem Zweck wird man einfach das letzte auftretende $\Delta^3 u$ gleich Null setzen.

Das oben dargestellte Verfahren, nach dem man nur die ersten Leitdifferenzen sucht und dann die ganze Reihe mit einer Korrektion für die höchste Differenz durch Aufsummieren erhält, ist einfacher, als wenn zur Bestimmung der Zwischenwerte die Leitdifferenzen für jedes Intervall berechnet werden müssen.

## § 4. Anwendung der Methode.

Die Ausgleichungsmethode von *King* besteht kurz zusammengefasst in folgendem: ist eine Reihe von rohen Beobachtungswerten $u_0$, $u_1$, $u_2$, ... gegeben, so summiert man von einem passenden Wert aus in Fünfergruppen, man bildet also: $w_x = u_x + u_{x+1} + u_{x+2} + + u_{x+3} + u_{x+4}$. Es hat sich gezeigt, dass die verschiedenen Gruppierungen nur wenig verschiedene Resultate ergeben. Deshalb empfiehlt King diejenige auszuwählen, die am geeignetsten ist, um das Ende zu vervollständigen.

Aus der Reihe der Gruppen $w_x$ bestimmt man nun die Differenzen $\Delta w_x$ und $\Delta^2 w_x$. Dann werden die ausgeglichenen Kardinalpunkte $u'_{x\,\vdash 7}$ nach der Formel (13) berechnet. Sie können leicht kontrolliert werden indem man die Kolonnen der $w$, $\Delta w$, $\Delta^2 w$ summiert, aber alle nur bis zum gleichen Wert der Variablen, und darauf die Formel (13) anwendet. Das Resultat muss gleich sein der Summe der Kardinalpunkte bis zum entsprechenden Wert der Variablen. Will man die Formel (13 *a*) benutzen, so brauchen nur die $w$ und $\Delta^2 w$ summiert zu werden. Es ist aber dann zu beachten, dass der Index von $w$ um fünf höher ist als derjenige von $\Delta^2 w$.

Aus der Reihe der Kardinalpunkte bildet man weiter die 1., 2. und 3. Differenzen. Damit berechnet man die Leitdifferenzen für das erste Intervall sowie die aufeinanderfolgenden korrigierten $\delta^3 u$ und erhält schliesslich durch Aufsummieren die Reihe der ausgeglichenen Werte. Je nachdem die Reihe der Kardinalpunkte über die gewünschte Reihe von ausgeglichenen Werten hinausreicht oder ob beide beim selben Wert beginnen, hat man die Formeln (15) und (16) oder (17) und (18) anzuwenden.

Zur Kontrolle empfiehlt es sich, die $\delta u$ und $\delta^2 u$ etwa im Intervall von 20 Einheiten der Variablen nach den Formeln (15) zu bestimmen. Die aufsummierten Differenzen werden, infolge Abrundungsfehlern, in den letzten Dezimalen ein wenig von den berechneten abweichen, und zur Weiterrechnung wird man deshalb besser die letzteren verwenden. Durch diese Zwischenrechnungen hat man aber nun in angemessenen Abständen eine Kontrolle, die man sonst erst in den Kardinalpunkten erhalten würde.

Es soll vielleicht hier erwähnt werden, dass man oft die 3. Differenzen der ausgeglichenen Werte bildet, um zu untersuchen ob sie regelmässig verlaufen. Wenn man nun die Interpolation wie oben angegeben an den Werten selbst und nicht z. B. an deren Logarithmen durchführt, so hat man ohne weiteres die Reihe dieser 3. Differenzen. Sie werden allerdings von den aus den auf- und abgerundeten ausgeglichenen Werten berechneten 3. Differenzen etwas abweichen, jedoch nur unbedeutend.

*King* hat seine Ausgleichungsmethode hauptsächlich auf Sterbetafeln angewendet. Die Ansichten, welche Funktion in diesem Falle am besten auszugleichen sei, waren geteilt. Bei Verwendung des *Makeham*schen Gesetzes wählte man meistens $p_x$ oder $\log p_x$, während *Woolhouse* die $l_x$ ausglich und *Higham* und *Karup* die $q_x$. *King* betrachtete oft $\log q_x$ oder auch $\log (q_x + 0{,}1)$, weil bei einigen Altern das rohe $q_x$ Null ist und $\log q_x$ dann $= -\infty$ wäre. Um nicht mit negativen Charakteristiken rechnen zu müssen, wird statt $\log q_x$ auch $n + \log q_x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ verwendet.

Neben der Ausgleichung empfiehlt King [26]) die sogenannte Konstruktion einer Sterbetafel. Ohne die unausgeglichenen $q_x$ zu berechnen, kann man direkt aus

den Lebenden unter Risiko ($E_x$) und den Sterbefällen ($\theta_x$) eine ausgeglichene Tafel erhalten. Durch Anwendung der Formel (13 *a*) auf die $E_x$ und $\theta_x$, beidemale natürlich für denselben Wert von $x$, bestimmt man die Kardinalpunkte $E'_x$ und $\theta'_x$ und der Quotient $\frac{\theta'_x}{E'_x}$ ergibt ausgeglichene fünfjährige Werte von $q_x$. Die Formel (13 *a*) kann auch in der Form $5\,u'_{x+7} = w_{x+5} - 0{,}04\,\Delta^2 w_x$ verwendet werden, da infolge der Quotientenbildung der Faktor 5 nachher wegfällt. Zwischen den ausgeglichenen $q_x$ wird nun oskulatorisch interpoliert und zwar mit $q_x$ selbst oder einer der oben erwähnten Funktionen von $q_x$.

*King* hat nach seiner Methode auch die Altersverteilung einer Bevölkerung ausgeglichen. Es wird oft beobachtet, dass bei den Altern die mit 0, 2, 5, 8 endigen zu viel Personen angegeben werden. Deshalb bildete King die Gruppen 4—8, 9—13, 14—18, usw. mit den zentralen Altern 1 und 6, damit 0 und 8, wo die meisten falschen Angaben zu sein scheinen, getrennt sind. Auf Grund dieser Gruppen wird nun die Ausgleichung vorgenommen, d. h. die Bestimmung der Kardinalpunkte mit darauffolgender oskulatorischer Interpolation für die Zwischenwerte. Man erwartet so, dass die ausgeglichenen Werte eine bessere Darstellung der wirklichen Verhältnisse geben als die beobachteten Zahlen selbst und dass die Methode von King sich hier für die Elimination von persönlichen Fehlern eignet.

Oft ist ein Beobachtungsmaterial nur in Gruppen bekannt, z. B. in Fünfergruppen. In diesem Falle bietet die Kingsche Methode die Möglichkeit, aus den beobachteten Gruppen die ausgeglichenen Einzelwerte zu berechnen.

*Braun* [27]) hat die Methode mit gutem Erfolg auch auf geringes Material angewendet. Über die Ausgleichung von beschränkten Erfahrungen bemerkte King selbst: wenn sie so klein sind, dass die Methode nicht verwendet werden kann, dann ist es überhaupt kaum der Mühe wert auszugleichen. Hauptsächlich wegen der Fünfergruppierung der beobachteten Werte zur Bestimmung der Kardinalpunkte ist die Methode auch für kleines Beobachtungsmaterial geeignet, da dies gewissermassen eine Vorausgleichung bedeutet.

## § 5. Ausgleichung der Enden.

1. Bei allen mechanischen Methoden besteht die Notwendigkeit, die Ausgleichung an den Enden zu ergänzen. Diese Vervollständigung kann beliebig vorgenommen werden, solange die Kurven sich glatt aneinander anschmiegen und keine grossen Abweichungen ergeben.

Bei der Ausgleichung von Ausscheidetafeln empfiehlt es sich, die Bildung der Fünfergruppen $w_x$ so vorzunehmen, dass das Schlussalter $\omega$ einer der Kardinalpunkte wird, sofern es einigermassen genau festgelegt werden kann. Dazu ist das höchste Alter $x$ für $w_x$ um 7 Jahre jünger zu nehmen als das Alter $\omega$, wo die Ausscheidewahrscheinlichkeit $g_\omega$ eins ist. Der letzte berechnete Kardinalpunkt ist dann $u'_{\omega-10} = g'_{\omega-10}$ und bekannt ist noch $g_\omega = 1$. Damit lässt sich $g'_{\omega-5}$ bestimmen, wenn man annimmt, dass $g'_{\omega-20}$, $g'_{\omega-15}$, $g'_{\omega-10}$, $g'_{\omega-5}$ und $g'_\omega = g_\omega$ eine Wertereihe bilden deren 3. Differenzen z. B. konstant sind. Die Beziehung (4) ergibt hier:

$$g'_\omega = g'_{\omega-20} + 4\,\Delta\, g'_{\omega-20} + 6\,\Delta^2 g'_{\omega-20} + 4\,\Delta^3 g'_{\omega-20} \quad (19)$$

Die fünfjährigen Differenzen $\Delta$ und $\Delta^2$ werden aus $g'_{\omega-20}$, $g'_{\omega-15}$, $g'_{\omega-10}$ berechnet und die unbekannte 3. Differenz erhält man mit:

$$\Delta^3 g'_{\omega-20} = \frac{1}{4}\{g'_{\omega} - g'_{\omega-20} - 4\,\Delta g'_{\omega-20} - 6\,\Delta^2 g'_{\omega-20}\} \quad (19\,a)$$

womit sich schliesslich das gesuchte $g'_{\omega-5}$ bestimmen lässt zu:

$$g'_{\omega-5} = g'_{\omega-20} + 3\,\Delta g'_{\omega-20} + 3\,\Delta^2 g'_{\omega-20} + \Delta^3 g'_{\omega-20} \quad (19\,b)$$

Die Rechnung kann entsprechend auch mit einer konstanten 4. Differenz durchgeführt werden.

2. Wird die Summierung so vorgenommen, dass sich für $\omega$ nicht ein Kardinalpunkt ergibt, so ist, wenn über $g_\omega$ wieder eine Annahme getroffen werden kann, folgendes Verfahren am Platz. Ist der letzte Kardinalpunkt $g'_x$, so wird mit $g'_x$, $g'_{x-5}$, $g'_{x-10}$ und dem angenommenen Wert für $g_\omega$ eine dritte Differenz bestimmt und damit der oder die fehlenden Kardinalpunkte bis zum Alter $\omega$ interpoliert. Es kann auch mit einer 4. Differenz gerechnet werden, die man aus $g'_x$, $g'_{x-5}$, $g'_{x-10}$, $g'_{x-15}$ und $g_\omega$ erhält. Die gesuchten Differenzen ergeben sich aus folgenden Formeln:

$$g_\omega = g'_{x-10} + \binom{\omega - x + 10}{5}_1 \Delta g'_{x-10} + \binom{\omega - x + 10}{5}_2 \Delta^2 g'_{x-10} + \binom{\omega - x + 10}{5}_3 \Delta^3 g'_{x-10} \quad (20)$$

$$g_\omega = g'_{x-15} + \binom{\omega - x + 15}{5}_1 \Delta g'_{x-15} + \binom{\omega - x + 15}{5}_2 \Delta^2 g'_{x-15} + \\ + \binom{\omega - x + 15}{5}_3 \Delta^3 g'_{x-15} + \binom{\omega - x + 15}{5}_4 \Delta^4 g'_{x-15} \qquad (21)$$

Die berechneten Differenzen werden darauf zur Aufsummierung verwendet. Wenn eine Annahme für das Schlussalter getroffen werden kann, so erhält man dadurch meistens bessere Resultate als mit Extrapolation.

3. Statt die ausgeglichenen Werte zu ergänzen, kann man auch vor der Ausgleichung die Beobachtungsreihe über die Enden hinaus verlängern. Oft lässt sich leicht erkennen, wie die Reihe über die beobachteten Zahlen hinaus fortgesetzt werden kann, z. B. wenn die ausserhalb liegenden Werte Null sind. Solche Voraussetzungen sind aber nur versuchsweise zu verwenden, und es muss immer untersucht werden ob sie zulässig, d. h. durch das Resultat gerechtfertigt sind. Lässt sich keine Annahme treffen, so kann auch der Durchschnitt aus den ersten bzw. letzten fünf oder zehn Werten als Näherungswert für die ausserhalb der Tafel liegenden Alter angesehen werden. Dieses Verfahren ist jedoch nur am Platz, wenn die Wertereihe nicht zu stark ansteigt oder fällt. Mit Hilfe der beigefügten Zahlen erhält man nun genügend Kardinalpunkte und somit können alle Werte ausgeglichen werden. Tritt im Verlauf der Rechnung ein Maximum oder Minimum auf, das nicht gerechtfertigt ist, so kann es z. B. beseitigt werden, indem man seinen Wert für das ganze vorangehende oder nachfolgende Stück gelten lässt.

4. Für die Interpolation der Zwischenwerte kann im ersten und letzten Intervall statt nach dem früher angegebenen Verfahren mit konstanten 2. Differenzen auch mit konstanten 3. oder 4. gerechnet werden, die z. B. für das Ende mit dem letzten Kardinalpunkt $u'_x$ und den schon interpolierten Werten $u'_{x-5}$, $u'_{x-6}$, $u'_{x-7}$ und eventuell $u'_{x-8}$ nach folgenden Formeln bestimmt werden:

$$u'_x = u'_{x-7} + 7\,\delta\,u'_{x-7} + 21\,\delta^2 u'_{x-7} + 35\,\delta^3 u'_{x-7} \qquad (22)$$

$$u'_x = u'_{x-8} + 8\,\delta\,u'_{x-8} + 28\,\delta^2 u'_{x-8} + 56\,\delta^3 u'_{x-8} + 70\,\delta^4 u'_{x-8} \qquad (23)$$

Aus (22) erhält man $\delta^3 u'_{x-7}$ und aus (23) $\delta^4 u'_{x-8}$. Die $\delta$ sind hier jährliche Differenzen. Für den Anfang der Tafel werden die Werte in umgekehrter Reihenfolge geschrieben und dieselben Formeln angewendet.

5. Wenn die oskulatorische Interpolation bis $u'_x$ durchführbar ist und ausser dem Kardinalpunkt $u'_{x+5}$ noch ein weiterer Punkt $u_{x+5+n}$ bekannt ist oder doch eine Annahme darüber getroffen werden kann, so ist es möglich mit $u'_{x-2}$, $u'_{x-1}$, $u'_x$, $u'_{x+5}$ und $u_{x+5+n}$ eine 3. und 4. Differenz zu bilden und damit bis $u_{x+5+n}$ zu interpolieren, wenn $\delta^4$ als konstant betrachtet wird. Aus den beiden Gleichungen:

$$u'_{x+5} = u'_{x-2} + 7\,\delta\,u'_{x-2} + 21\,\delta^2 u'_{x-2} + 35\,\delta^3 u'_{x-2} + 35\,\delta^4 u'_{x-2}$$

$$u_{x+5+n} = u'_{x-2} + \binom{7+n}{1}\delta\,u'_{x-2} + \binom{7+n}{2}\delta^2 u'_{x-2} + \binom{7+n}{3}\delta^3 u'_{x-2} + \binom{7+n}{4}\delta^4 u'_{x-2} \qquad (24)$$

werden $\delta^3$ und $\delta^4$ berechnet und damit die fehlenden Werte aufsummiert.

Analog kann auch eine 2. und 3. Differenz mit $u'_{x-1}$, $u'_x$, $u'_{x+5}$, $u_{x+5+n}$ bestimmt werden. Man erhält sie aus folgenden Gleichungen:

$$u'_{x+5} = u'_{x-1} + 6\,\delta\,u'_{x-1} + 15\,\delta^2\,u'_{x-1} + 20\,\delta^3\,u'_{x-1} \quad \ldots \quad (25)$$

$$u_{x+5+n} = u'_{x-1} + \binom{6+n}{1}\delta\,u'_{x-1} + \binom{6+n}{2}\delta^2\,u'_{x-1} + \binom{6+n}{3}\delta^3\,u'_{x-1}$$

Mit diesen Differenzen kann man gegebenenfalls noch einige Werte extrapolieren.

6. Hat man z. B. am Anfang bis zum Alter $x$ ausgeglichen und bleiben noch $n$ Werte unausgeglichen, so kann man auch folgendermassen weiter vorgehen. Man bildet die Summen $\Sigma\,u'_{x+2}$, $\Sigma\,u'_{x+1}$, $\Sigma\,u'_x$ und $\Sigma\,u_{x-n}$, wobei von $(x+2)$ bis $x$ die ausgeglichenen und von $(x-1)$ bis $(x-n)$ die unausgeglichenen Werte betrachtet werden. Dann berechnet man $\delta\,\Sigma\,u'_{x+2}$, $\delta\,\Sigma\,u'_{x+1}$ und $\delta^2\,\Sigma\,u'_{x+2}$, um damit $\delta^3\,\Sigma\,u'_{x+2}$ zu bestimmen, das man als konstant annimmt. Die Werte ergeben sich aus folgender Darstellung:

| $x$ | $u$ | $\Sigma$ | $\delta\,\Sigma$ | $\delta^2\,\Sigma$ | $\delta^3\,\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $u'_{x+2}$ | $\Sigma\,u'_{x+2}$ | $\delta\,\Sigma\,u'_{x+2}$ | $\delta^2\,\Sigma\,u'_{x+2}$ | |
| $x+1$ | $u'_{x+1}$ | $\Sigma\,u'_{x+1}$ | $\delta\,\Sigma\,u'_{x+1}$ | | |
| $x$ | $u'_x$ | $\Sigma\,u'_x$ | | | |
| $x-1$ | $u_{x-1}$ | | | | |
| $x-2$ | $u_{x-2}$ | | | | |
| . | . | | | | |
| . | . | | | | |
| . | . | | | | |
| . | . | | | | |
| $x-n$ | $u_{x-n}$ | $\Sigma\,u_{x-n}$ | | | |

Es ist:

$$\Sigma u'_{x+2} = u'_{x+2}$$
$$\Sigma u'_{x+1} = u'_{x+2} + u'_{x+1}$$
$$\Sigma u'_{x} = u'_{x+2} + u'_{x+1} + u'_{x}$$
$$\Sigma u_{x-n} = u'_{x+2} + u'_{x+1} + u'_{x} + u_{x-1} + u_{x-2} + \ldots + u_{x-n}$$

Ferner:

$$\delta \Sigma u'_{x+2} = u'_{x+1}$$
$$\delta \Sigma u'_{x+1} = u'_{x}$$

Nun kann $\Sigma u_{x-n}$ dargestellt werden durch:

$$\Sigma u_{x-n} = \Sigma u'_{x+2} + \binom{n+2}{1} \delta \Sigma u'_{x+2} + \\ + \binom{n+2}{2} \delta^2 \Sigma u'_{x+2} + \binom{n+2}{3} \delta^3 \Sigma u'_{x+2} \qquad (26)$$

und daraus folgt:

$$\delta^3 \Sigma u'_{x+2} = \qquad (26\,a)$$
$$= \frac{1}{\binom{n+2}{3}} \left\{ \Sigma u_{x-n} - \Sigma u'_{x+2} - \binom{n+2}{1} \delta \Sigma u'_{x+2} - \binom{n+2}{2} \delta^2 \Sigma u'_{x+2} \right\}$$

Ist $\delta^3 \Sigma u'_{x+2}$ bestimmt, so können die Kolonnen der $\delta^2 \Sigma$ und $\delta \Sigma$ aufsummiert werden. Die $\delta \Sigma$ stellen die ausgeglichenen $u$ dar, wobei aber die Beziehung gilt: $\delta \Sigma u'_x = u'_{x-1}$.

Das analoge Verfahren kann auch für das Ende verwendet werden, es ist aber nun für $(x+2)$ $(x-2)$ und für $(x-n)$ $(x+n)$ zu setzen. Wird auf diese Weise vorgegangen, so bleibt $\Sigma u_{x-n}$ für die ausgeglichenen und unausgeglichenen Werte gleich, was manchmal von Vorteil ist.

Je nach dem Charakter der Beobachtungsreihe wird man die eine oder andere der hier erwähnten Arten für die Ausgleichung der Enden verwenden können.

## III. Ausgleichungsergebnisse.

Es würde zu weit führen, hier eine vollständige Aufzählung der Anwendungen der Kingschen Methode zu geben. Es soll deshalb ausser auf die Arbeiten von *King* [26]) und *Braun* [27]) nur darauf hingewiesen werden, dass einige Wertereihen der Rechnungsgrundlagen der eidgenössischen Versicherungskasse sowie ein Teil der Grundlagen der früher projektierten Alters- und Hinterlassenenversicherung nach King ausgeglichen sind. Im folgenden soll noch an einigen verschiedenen Zahlenreihen die Anwendbarkeit der Kingschen Methode erwiesen werden. Dabei ist jedoch die Durchführung der Ausgleichung nur kurz angegeben. Die ausgeglichenen Werte sind mit den entsprechenden beobachteten im Manuskript zu dieser Arbeit enthalten, das im versicherungswissenschaftlichen Seminar der bernischen Hochschule niedergelegt ist. Die Ergebnisse werden jedoch durch die beigelegten graphischen Darstellungen am besten veranschaulicht. Die gestrichelten Zickzacklinien stellen jeweilen die Beobachtungsdaten dar, die ausgezogenen Kurven die ausgeglichenen Werte.

### 1. Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer, Schweiz 1918.

Als erstes Beispiel wurde eine Absterbeordnung gewählt, die nicht nach dem sonst häufig verwendeten Makehamschen Sterbegesetz ausgeglichen werden kann, nämlich die Absterbeordnung der schweizerischen männlichen Bevölkerung für das Jahr 1918. Während die Kurve der $q_x$ sonst in den jungen Altern zuerst rasch und dann langsamer fällt bis etwa zum Alter 13 und nach-

her allmählich und zuletzt steil wieder ansteigt, zeigt die Kurve von 1918 zwischen 13 und 45 eine bedeutend höhere Sterblichkeit. Bis zum Alter 28 steigt sie rasch an, sinkt dann wieder etwas, bleibt aber immer gegenüber den $q_x$ anderer Beobachtungsjahre überhöht. Die Ursache dieser hohen Sterblichkeit ist bekanntlich die Grippeepidemie von 1918.

Die unausgeglichenen $q_x$ sind in einer Arbeit von *Ney* [29]) enthalten, die ausgeglichenen werden durch die beigelegte Figur veranschaulicht. Die Übereinstimmung kann als sehr gut angesehen werden. Die Anzahl der Nullstellen oder Zeichenwechsel für die aufsummierten Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnungsergebnis ist 32.

Die Ausgleichung wurde so vorgenommen, dass für $x = 0, 5, 10, \ldots 95$ die Fünfergruppen gebildet und damit die Kardinalpunkte für $x = 7, 12, 17, \ldots 92$ berechnet wurden. Durch die oskulatorische Interpolation erhielt man die Zwischenwerte von 12 bis 87.

Am Anfang der Tafel wurden für die Alter 0, 1 und 2 die unausgeglichenen Werte beibehalten. Mit den ausgeglichenen Werten für $x = 15, 14, 13, 12$ und dem unausgeglichenen für $x = 2$ kann mittels der Beziehung (4), die natürlich auch für die $\delta$ gilt, eine 4. Differenz berechnet werden, und wenn diese als konstant betrachtet wird, erhält man durch Aufsummieren die Zwischenwerte von 3 bis 13. Da die so resultierenden $q'_x$ für $x = 3$, 4 und 5 gegenüber den beobachteten $q_x$ etwas hoch ausfielen, wurde als ausgeglichener Wert das arithmetische Mittel aus $q'_x$ und $q_x$ angenommen. Weiter wurde für $x = 7$ statt des früher berechneten Kardinalpunktes der durch die Interpolation mit der konstanten 4. Differenz erhaltene Wert verwendet.

Für das Ende wurde analog mit den ausgeglichenen Werten für $x = 84, 85, 86, 87$ und 92 nach Formel (23) eine 4. Differenz berechnet und damit die Zwischenwerte aufsummiert. Durch Extrapolation mit derselben konstanten Differenz ergaben sich im vorliegenden Beispiel recht gute Resultate, so dass die Tafel auf diese Weise ganz vervollständigt werden konnte. Im allgemeinen ist zu sagen, dass man mit einer Annahme für das Schlussalter meistens bessere Resultate erhält als mit Extrapolation.

## 2. Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer, Schweiz 1920/21.

Bildet man von den unausgeglichenen $q_x$ nach *Ney* [29]) die Fünfergruppen für $x = 0, 5, \ldots 90$, so ergeben sich ausgeglichene Kardinalpunkte für $x = 7$ bis 87 und durch die oskulatorische Interpolation die Zwischenwerte von 12 bis 82. Der erste Kardinalpunkt wurde nicht beibehalten, da er ein wenig zu tief liegt, um als ausgeglichener Wert gelten zu können.

Für den Anfang wurde aus dem rohen Wert für $x = 4$ und den ausgeglichenen für $x = 15, 14, 13, 12$ eine konstante 4. Differenz berechnet und damit die Werte von $x = 4$ bis 12 interpoliert.

Die Vervollständigung für die höhern Alter gelang auf folgende Weise: mit $q'_{80}$, $q'_{81}$, $q'_{82}$ und $q'_{87}$ wurde nach Formel (22) eine konstante 3. Differenz bestimmt und damit die Zwischenwerte berechnet. Versuchsweise wurde noch für höhere Werte von $x$ mit derselben Differenz extrapoliert: es ergaben sich annehmbare Werte bis 92. Da die Werte der $q_x$ für 1920/21 schon von *Ney* nach *Makeham* ausgeglichen vorlagen, wurde versucht, denselben Endwert bei $x = 100$ zu erreichen. Mit einer 4. Differenz aus $q'_{85}$ bis $q'_{92}$ und $q'_{100}$ ergab sich

ein angemessener Verlauf der dazwischenliegenden $q'_x$. Die Anzahl der Nullstellen oder Zeichenwechsel der aufsummierten Differenzen zwischen Beobachtung und Ausgleichung ist hier 28.

Der Vergleich mit den nach Makeham ausgeglichenen Zahlen, die in der entsprechenden graphischen Darstellung ebenfalls eingetragen sind, lässt erkennen, dass durch die Kingsche Methode ein besserer Anschluss an die Beobachtungsdaten erzielt wird. Zwischen den Altern 18 bis 27 verläuft die Makehamsche Kurve etwas tief, dagegen liegt sie von 65 bis 70, wo die $q_x$ und $q'_x$ fast zusammenfallen und auch von 83 an ein wenig zu hoch. Ihr Verlauf ist dafür, bis auf den Übergang beim Alter 17, stetiger, was aber ohne weiteres durch das analytische Ausgleichsverfahren bedingt ist.

Es ist noch zu erwähnen, dass die Fünfergruppe für $x = 95$ ausser Acht gelassen wurde, da für 98 und 99 keine rohen Beobachtungszahlen vorlagen. Der Wert Null ist in diesem Falle nicht angepasst. Mit einem Mittelwert aus den letzten 4 oder 5 Werten würde man aber wahrscheinlich ein brauchbares Resultat erhalten haben und die Vervollständigung für die höhern Alter wäre vielleicht etwas einfacher gewesen.

### 3. Heiratswahrscheinlichkeiten für Witwer der schweizerischen Bevölkerung für 1901—1910.

*Ney* [30]) gibt die rohen $\theta_x$ für $x = 19$ bis 83. Ergänzt man für $x < 19$ und $x > 83$ den Wert $\theta_x = 0$, dann ergeben sich durch die Anwendung der Kingschen Ausgleichungsmethode für alle rohen $\theta_x$ auch ausgeglichene $\theta'_x$ und eine Vervollständigung der Enden ist nicht mehr nötig.

Die Kurve der $\theta_x$ zeigt den bekannten Verlauf, d. h. ein rasches Ansteigen bis zum Maximum beim Alter 28, darauf sinkt sie zuerst steil und dann immer allmäh-

licher bis etwas über das Alter 80, wobei das letzte Stück sich asymptotisch der Altersachse nähert.

Die Ausgleichung wurde hier versuchsweise mit zwei verschiedenen Gruppierungen vorgenommen, und zwar vorerst für $x = 9, 14, \ldots$ und dann für $x = 6, 11, 16, \ldots$. Durch die erste Art der Gruppierung ergab sich ein besserer Anschluss an die Beobachtungsdaten, wie namentlich aus den akkumulierten Abweichungen ersichtlich ist. Im 2. Fall verläuft die Kurve meistens tiefer, so dass die aufsummierten Abweichungen grösser sind. Das Maximum liegt allerdings etwas höher als im ersten Fall, erscheint jedoch ein wenig gegen die höhern Alter hin verschoben. Die Anzahl der Zeichenwechsel beträgt bei der ersten Ausgleichung 16, bei der zweiten nur 2. In der graphischen Darstellung ist nur die erstere eingetragen.

### 4. Das Geschlechterverhältnis in der schweizerischen Wohnbevölkerung für 1900, 1910 und 1920.

Die beobachteten $g_x$, d. h. die Verhältnisse der Anzahl der Frauen zu der Anzahl der Männer desselben Alters wurden zuerst alle mit den Fünfergruppen für $x = 0, 5, 10, \ldots$ ausgeglichen. Setzt man für negative Alter den bei $x = 0$ geltenden Wert und ergänzt das Ende mit einem Wert der etwas höher ist als das Maximum der unausgeglichenen Zahlen, so erhält man von 0 bis etwas über 80 annehmbare ausgeglichene Werte. Die Kurve von 1900 wurde noch mit anderer Gruppierung, nämlich für $x = 2, 7, 12, \ldots$ ausgeglichen, wodurch aber das Maximum zwischen 20 und 25 etwas gegen die höhern Alter hin verschoben wird. In der graphischen Darstellung ist diese zweite Ausgleichung eingezeichnet. Sie lässt erkennen, dass bei gewissen Schwankungen der Beobachtungsdaten die Fünfer-

gruppierung zum Zwecke der Ausgleichung doch nicht ohne weitere Überlegung vorgenommen werden darf.

Durch die oben erwähnte Ausdehnung der Beobachtungsdaten ergeben sich für das Ende der Reihen der ausgeglichenen Werte einige Wellenbewegungen, die nicht gerechtfertigt sind. Sie entstehen dadurch, dass für $x > 100$ ein konstanter Wert ergänzt wird, trotzdem die Kurve vorher stark ansteigt. Die Ausgleichung würde hier besser mit einer Annahme für $g_x$ für $x = 100$ oder ein höheres Alter weitergeführt oder vielleicht mit Extrapolation.

Die ausgeglichenen Kurven zeigen folgenden Verlauf: in den jüngsten Altern überwiegen die Knaben. Für 1900 und 1910 ist von 19 bis 26 die Anzahl der Frauen grösser, von 26 bis 30 resp. 36 kleiner und später mit steigender Tendenz immer grösser als die Anzahl der Männer desselben Alters. Die Kurve für 1920 zeigt ein etwas anderes Bild. Von 14 an steigt das Verhältnis rasch zu einem Maximum bei 27, sinkt dann ein wenig, liegt von 46 bis 58 sogar unter den Kurven für 1900 und 1910, erhebt sich nachher aber wieder bedeutend höher. Die grossen Werte von 15 bis 43 sind auch hier wieder im wesentlichen durch die Grippeepidemie von 1918 bedingt, da diese unter den Frauen weniger Opfer forderte als unter den Männern.

### Schlussbemerkung.

Die vorliegenden Untersuchungen lassen erkennen, wie rasch eine gegebene Zahlenreihe nach der Methode von King ausgeglichen ist. Zudem zeigen die Anwendungen, dass die ausgeglichenen Werte mit der grössten Treue den Beobachtungswerten folgen, zu gleicher Zeit aber glatt verlaufen. Vielleicht dient die vorliegende Arbeit, die die Vorteile der Methode von King darlegt, zur weitern Verbreitung und Anwendung derselben.

# Literaturnachweis.

Es bedeutet JIA: Journal of the Institute of Actuaries.

[1]) *Sprague:* The Graphic Method of Adjusting Mortality Tables. JIA Band 26 (1887). Ferner Band 21 (1879), 22 (1881).

[2]) *Schaertlin:* Zeitschrift für schweizerische Statistik, 1888.

[3]) *Schaertlin:* Zeitschrift für schweizerische Statistik, 1887.

[4]) *Karup:* Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode. Trans. of the Second Int. Act. Congress. London 1898.

[5]) *Hardy:* Friendly Societies. JIA Band 27 (1889). Graduation Formulas. JIA Band 32 (1896).

[6]) *Higham:* On the Adjustment of Mortality Tables. JIA Band 23 (1882), 24 (1884), 25 (1886).
Graduation Formulas. JIA Band 27 (1889), 31 (1895).

[7]) *Lidstone:* On the Rationale of Formulae for Graduation by Summation. JIA Band 41 (1907), 42 (1908).

[8]) *Spencer:* JIA Band 38 (1904), 41 (1907).

[9]) *Woolhouse:* Explanation of a New Method of Adjusting Mortality Tables. JIA Band 15 (1870). Ferner Band 13 (1867), 21 (1879), 26 (1887), 29 (1892).

[10]) *Wirtinger:* Zur Theorie der mechanischen Ausgleichung. Österreichische versicherungswissenschaftliche Mitteilungen. III. Band, II. Heft (1907).

[11]) *Blaschke:* Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen. Wien 1893.

[12]) *Sprague:* JIA Band 29 (1892).

[13]) *Ackland:* On the Graduation of Mortality Tables. JIA Band 23 (1882).

[14]) *Todhunter:* On Formulas for Graduation by Summation. JIA Band 32 (1896).

[15]) *Kenchington:* JIA Band 44 (1910).

[16]) *Watson:* JIA Band 50 (1917).

[17]) *Sprague:* Explanation of a New Formula for Interpolation. JIA Band 22 (1881).

[18]) *King:* Notes on Summation Formulas of Graduation, with certain new Formulas for consideration. JIA Band 41 (1907).

[19]) *Altenburger:* Beiträge zum Problem der Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln. Österreichische versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, I. Band, IV. Heft (1905).

Versuch einer allgemeinen Theorie der mechanischen Ausgleichungsmethoden. Österreichische versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, III. Band, I. Heft (1907).

Noch ein Beitrag zur Theorie und Praxis der mechanischen Ausgleichungsmethoden. Österreichische versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, IV. Band, II. Heft (1909).

[20]) *Perutz:* Die theoretischen Grundlagen der mechanischen Ausgleichung. Österreichische Revue. Jahrgang XXXVI und XXXVII.

[21]) *Whittaker* and *Robinson:* The Calculus of Observations. London 1924.

[22]) *Dizler:* Beiträge zur Ausgleichung nach der Theorie des Minimums. V. Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft, Band II. Berlin 1906.

[23]) *Sheppard:* Graduation by Reduction of Mean Square of Error. JIA Band 48 (1914), 49 (1915).

[24]) *Rhodes:* Smoothing. Tracts for Computers *(Pearson)*, Band VI, 1921.

[25]) *Lidstone:* Alternative Demonstration of the Formula for Oskulatory Interpolation. JIA Band 42 (1908).

[26]) *King:* On the Construction of Mortality Tables from Census Returns and Records of Deaths. JIA Band 42 (1908).

On a New Method of Constructing and Graduating Mortality and other Tables. JIA Band 43 (1909). VI. Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft. Wien 1909.

On a short Method of Constructing an Abridged Mortality Table. JIA Band 48 (1914), 49 (1915).

[27]) *Braun:* Über die Verwendbarkeit der Kingschen Ausgleichungsmethode. Veröffentlichung des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft. Heft 20, 1911.

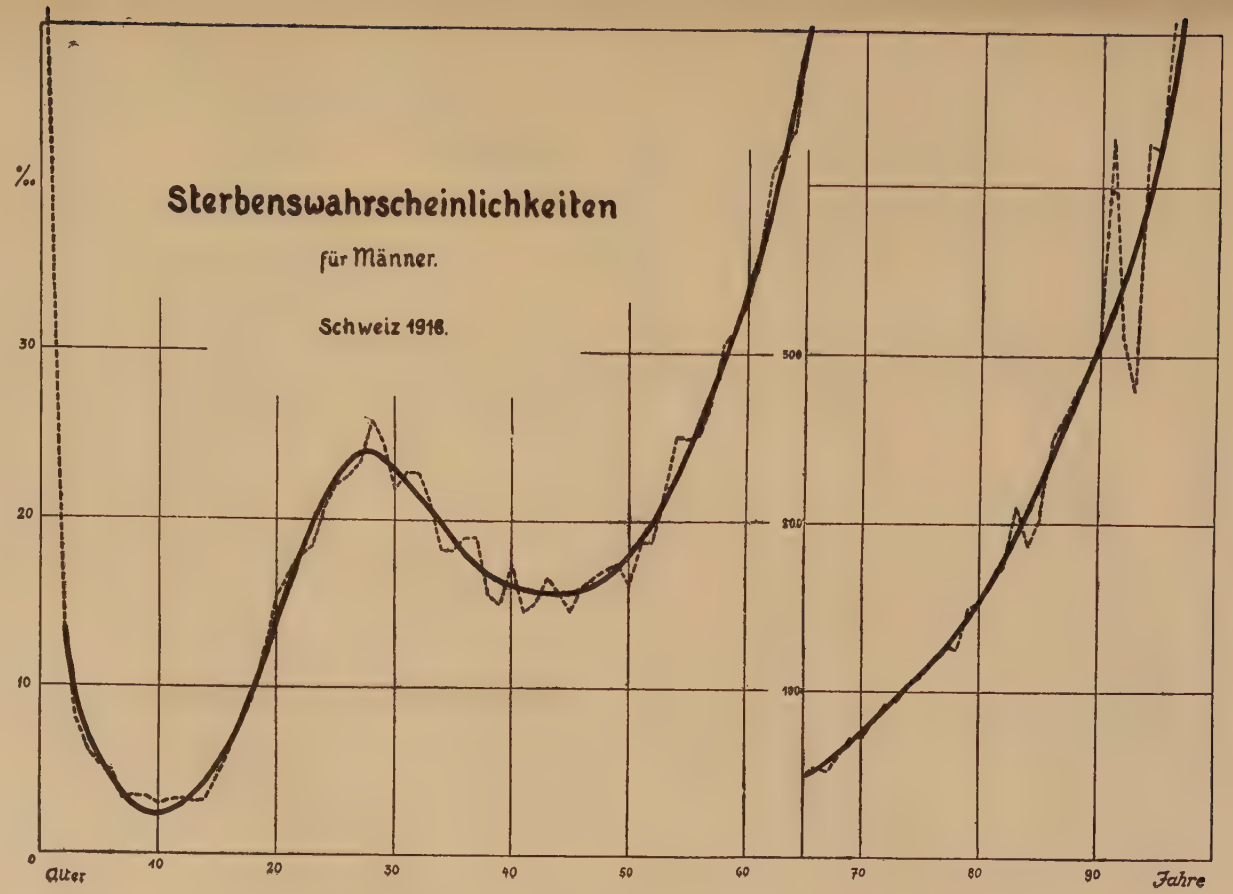
[28]) *Yule:* A Note on Mr. King's Method of Graduation and its Relation to Graphic Method. JIA Band 52 (1920/21).

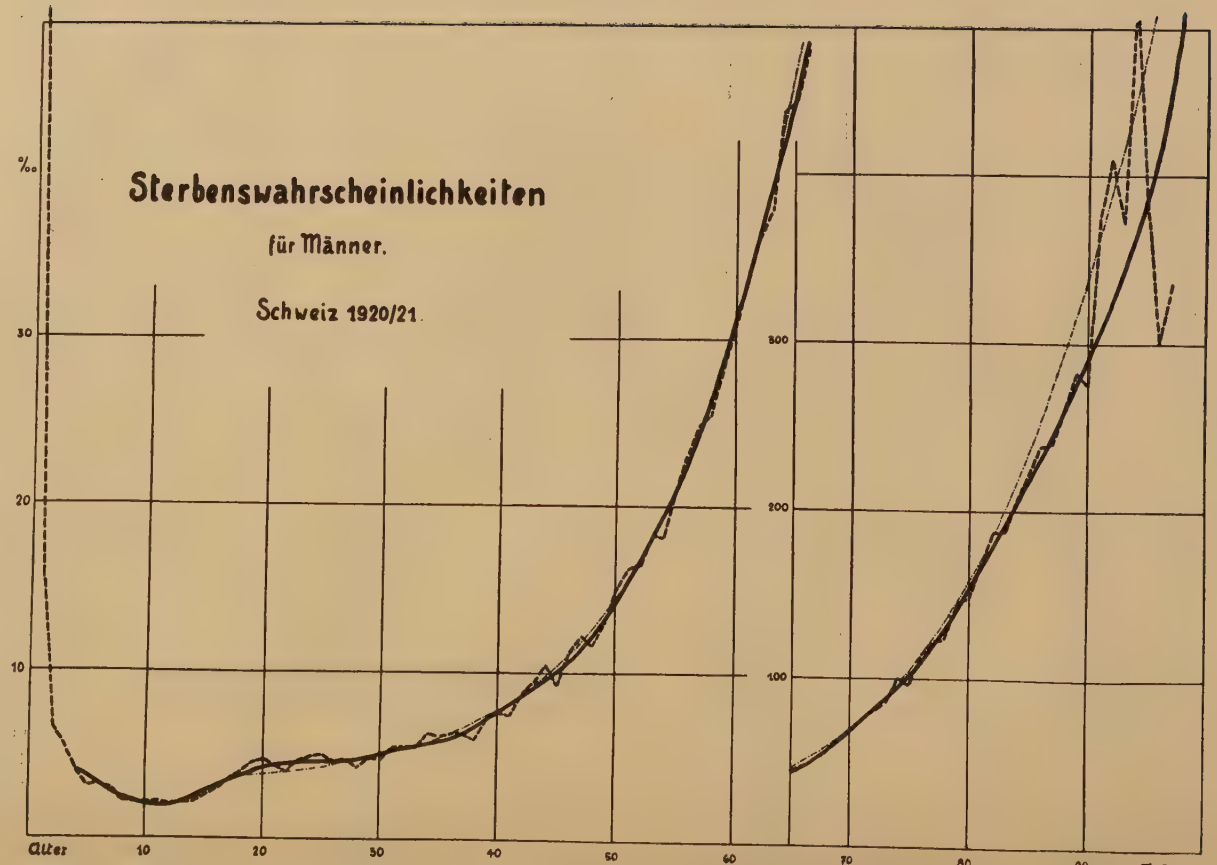
[29]) *Ney:* De la mortalité dans la population suisse. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker. 22. Heft, 1927.

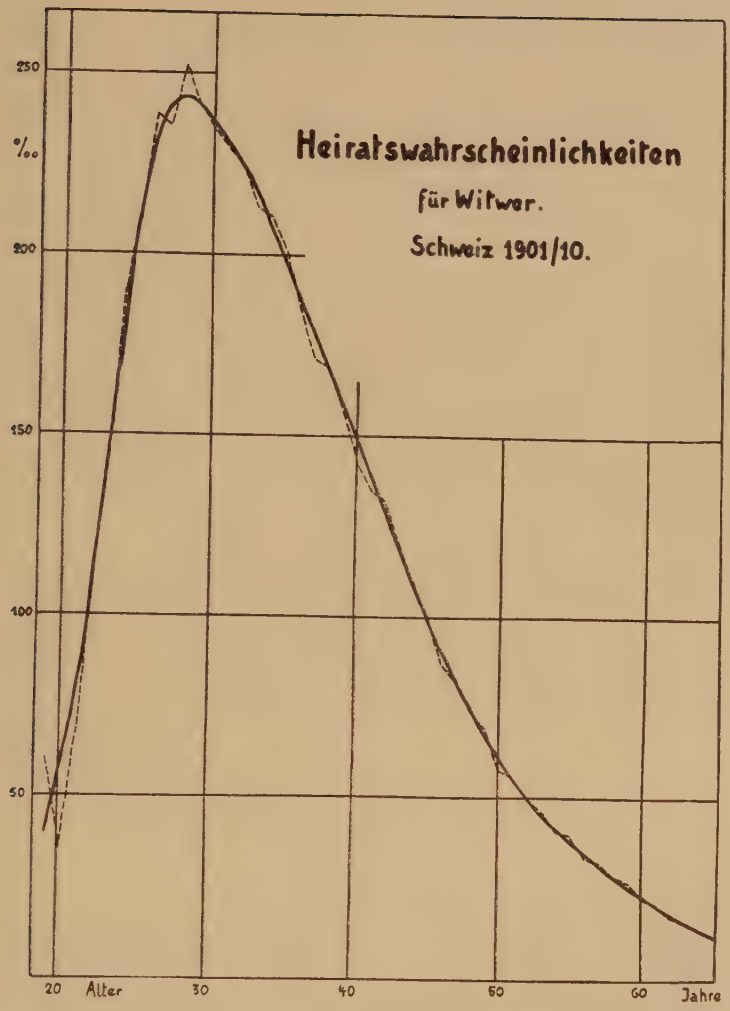
[30]) *Ney:* Détermination de la probabilité de mariage etc. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 12. Heft, 1917.

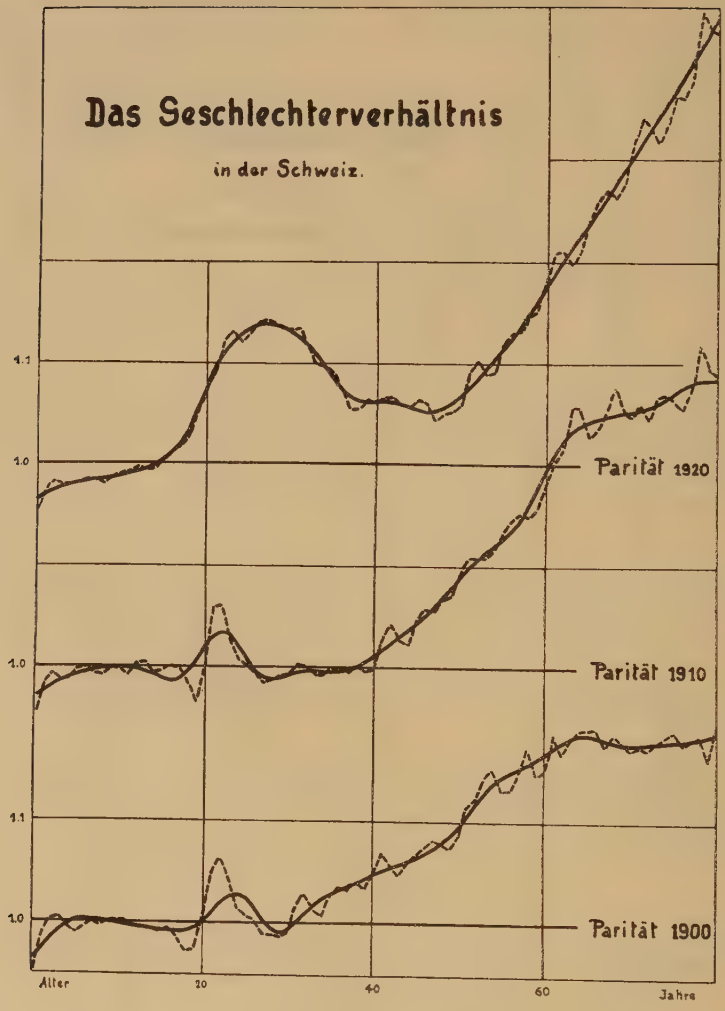
# Inhalt.


| | Seite |
|---|---|
| Einleitung | 5 |
| I. Die mechanischen Ausgleichungsmethoden. | |
| § 1. Allgemeines | 8 |
| § 2. Überprüfung der Ausgleichung | 13 |
| § 3. Die verschiedenen Methoden | 14 |
| II. Die Ausgleichungsmethode von King. | |
| § 1. Die oskulatorische Interpolation | 24 |
| § 2. Die Kingsche Ausgleichungsmethode | 32 |
| § 3. Interpolation durch Korrektion der letzten Differenzenreihe | 35 |
| § 4. Anwendung der Methode | 41 |
| § 5. Ausgleichung der Enden | 44 |
| III. Ausgleichungsergebnisse | 50 |
| Literaturnachweis | 56 |
| Graphische Darstellungen | 59 |


Sterbenswahrscheinlichkeiten
für Männer.
Schweiz 1916.
‰
30
20
10
0
Alter
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Jahre


Sterbenswahrscheinlichkeiten
für Männer.
Schweiz 1920/21.
‰
30
20
10
300
200
100
Alter
10
20
30
40
50
60
70


Heiratswahrscheinlichkeiten
für Witwer.
Schweiz 1901/10.
‰
250
200
150
100
50
20
Alter
30
40
50
60
Jahre


Das Geschlechterverhältnis
in der Schweiz.
1.1
1.0
Parität 1920
1.0
Parität 1910
1.1
1.0
Parität 1900
Alter
20
40
60
Jahre